MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

12. travnja 1997.

I. razred

1. Nacrtaj skup točaka (x, y) u koordinatnoj ravnini koje zadovoljavaju jednakost
$$|y| = x + \sqrt{x^2 - 6x + 9}.$$

2. Neka je $\{p, r, s, t\} = \{4, 8, 12, 16\}$. Promatrajući sve moguće izbore brojeva p, r, s, t, nađite sva rješenja (x, y, z) sustava jednadžbi:
$$\begin{aligned} x + y + z &= p \\ x + y - z &= r \\ x - y + z &= s \\ x - y - z &= t. \end{aligned}$$

3. U šiljastokutnom trokutu ABC ortocentar raspolavlja visinu povučenu iz vrha A, dok visinu povučenu iz vrha B dijeli u omjeru $2 : 1$, tako da je ortocentar bliži nožištu visine nego vrhu. U kojem omjeru ortocentar dijeli visinu iz vrha C?

4. Neka su a, b i c duljine stranica trokuta. Dokaži da tada vrijedi nejednakost:
$$\frac{2}{b+c-a} + \frac{2}{c+a-b} + \frac{2}{a+b-c} > \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}.$$

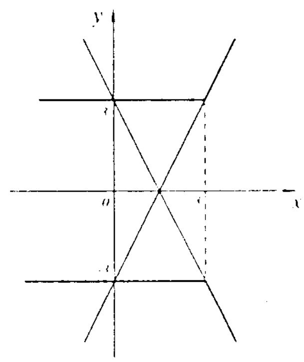
Rješenja zadataka za prvi razred.
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Budući da je $\sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$, jednadžba se može zapisati i kao

$$|y| = x + |x-3|.$$ 5 bodova

Brojevi u svakoj od apsolutnih vrijednosti mogu biti pozitivni ili negativni, pa promatramo četiri slučaja:

- $y \geq 0$, $x \geq 3$ — graf funkcije $y = 2x - 3$.
- $y \geq 0$, $x < 3$ — graf funkcije $y = 3$.
- $y < 0$, $x \geq 3$ — graf funkcije $y = -2x + 3$.
- $y < 0$, $x < 3$ — graf funkcije $y = -3$. 15 bodova



Slika – graf 5 bodova

Napomena. Može se i prvo uočiti da je skup točaka koji treba nacrtati simetričan u odnosu na x-os, pa tek onda razbiti problem na slučajeve $x \geq 3$, $x < 3$.

2. Zbrajanjem svih četiriju jednadžbi dobivamo $x = (p+r+s+t)/4 = (4+8+12+6)/4 = 10$. 5 bodova

Nakon uvrštavanja broja x, sustav jednadžbi glasi:

$$\begin{aligned} y + z &= p - 10 \\ y - z &= r - 10 \\ -y + z &= s - 10 \\ -y - z &= t - 10. \end{aligned}$$

5 bodova

Uspoređivanjem prve i zadnje jednadžbe, te druge i treće vidimo da mora biti $p - 10 = -(t-10)$, te $r - 10 = -(s-10)$.
Dakle, $p + t = r + s = 20$. 5 bodova
Dozvoljeni izbori za p, r, s, t su prikazani prvim dijelom tablice. Iz sustava jednadžbi sada možemo izbaciti npr. zadnje dvije jednadžbe, te riješiti preostali 2×2 sustav.

Rješenja su $y = (p+r-20)/2$, $z = (p-r)/2$, pa uvrštavanjem dopustivih vrijednosti za p i r dobivamo sva rješenja:

p	r	s	t	x	y	z
4	8	12	16	10	-4	-2
4	12	8	16	10	-2	-4
8	4	16	12	10	-4	2
8	16	4	12	10	2	-4
12	4	16	8	10	-2	4
12	16	4	8	10	4	-2
16	8	12	4	10	2	4
16	12	8	4	10	4	2

10 bodova

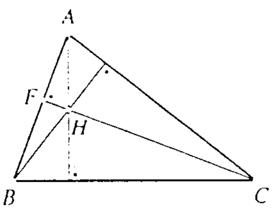
Napomena. Bitno je u rješenju vidjeti trenutak u kojem jednadžba ili jednadžbe (ovisno o tome je li x već izračunat ili ne) postaju suvišne. Na samom početku ne može se jednostavno prekrižiti jedna jednadžba!

Ako se na početku prekriži jedna jednadžba, dobivaju se 24 rješenja, koja na kraju treba uvrstiti u odbačenu jednadžbu i provjeriti koja su od njih zaista rješenja polaznog sustava. Učenicima koji to ne učine, preporučamo za ovaj zadatak dati najviše **20 bodova**.

Slično se događa ako npr. prvo izračunamo x, zatim iz prve dvije jednadžbe z, te iz bilo koje na kraju y. Time ponovno nisu iskorištene sve jednadžbe, pa se dobivaju 24 rješenja za koja tek treba provjeriti zadovoljavaju li sve jednadžbe (točnije, samo jednu, neiskorištenu). Predlažemo ponovno najviše **20 bodova**.

U svakom slučaju bodovati i korektno rješavanje sustava jednadžbi!

3. Označimo s H ortocentar trokuta, s a, b, c duljine stranica trokuta, s h_a, h_b, h_c duljine visina povučene iz vrhova A, B, C redom, te s P, P_1, P_2 i P_3 površine trokuta ABC, BCH, CAH i ABH, tim redom.



Tada imamo

$$P = \frac{a}{2} \cdot h_a = \frac{b}{2} \cdot h_b = \frac{c}{2} \cdot h_c.$$

$$P_1 = \frac{a}{2} \cdot \frac{h_a}{2} = \frac{P}{2}, \quad P_2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{h_b}{3} = \frac{P}{3},$$

pa je

$$P_3 = P - P_1 - P_2 = P - \frac{P}{2} - \frac{P}{3} = \frac{P}{6}.$$

10 bodova

Označimo s F nožište visine h_c kao što je i naznačeno na slici.
Tada je

$$P_3 = \frac{c}{2} \cdot |HF|. \tag{1}$$

S druge strane je

$$P_3 = \frac{P}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{c}{2} \cdot h_c. \tag{2}$$

Izjednačimo li desne strane u (1) i (2), dobivamo

$$|HF| = \frac{1}{6} h_c.$$

10 bodova

Konačno, imamo

$$|CH| : |HF| = 5 : 1.$$

5 bodova

4. Grupiramo članove na lijevoj strani na ovaj način

$$\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b}\right) + \left(\frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c}\right) + \left(\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a}\right).$$

5 bodova

Promatrajmo prvi pribrojnik:

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} = \frac{2c}{c^2 - (a-b)^2}.$$

Budući da je $0 < c^2 - (a-b)^2 < c^2$ (prva nejednakost zbog pretpostavki $a < b + c$, $b < a + c$), dobivamo

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} > \frac{2}{c}.$$

15 bodova

Slično se izvode i nejednakosti

$$\frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} > \frac{2}{a}, \qquad \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} > \frac{2}{b},$$

čijim se zbrajanjem dobiva tvrdnja zadatka. 5 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

12. travnja 1997.

II. razred

1. Rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + px + q = 0$, gdje je $p + q = 1996$, su cijeli brojevi. Nađite ta rješenja.

2. Konveksni četverokuti $ABCD$ i $AECF$ upisani su u istu kružnicu. Izrazite omjer njihovih površina pomoću duljina njihovih stranica.

3. Odredite $\log_a b$, $\log_{ab} b$, $\log_{ab^2} b$ i $\log_{ab^3} b$, ako je
$$\log_a b - \log_{ab} b = \log_{ab^2} b - \log_{ab^3} b.$$

4. Unutar danog trokuta, čije opisana i upisana kružnica imaju središta O i I i polumjere R i r, nacrtane su četiri jednake kružnice polumjera x. Tri od njih diraju po dvije stranice trokuta te izvana diraju četvrtu kružnicu čije je središte u točki S. Dokažite da točka S leži na pravcu određenom točkama O i I. Nađite polumjer x.

Rješenja zadataka za drugi razred.
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Prema Vièteovim formulama za rješenja x_1 i x_2 vrijedi:

$$1996 = p + q = -(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1.$$

Odavde se dobije $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1997$. 10 bodova

Kako je 1997 prost broj, moguće je (uzmimo da je $|x_1| \le |x_2|$):

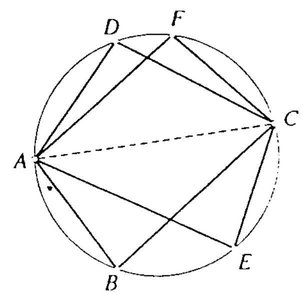
$x_1 - 1 = 1, \quad x_2 - 1 = 1997$ ili

$x_1 - 1 = -1, \quad x_2 - 1 = -1997$. 10 bodova

Stoga su jedina rješenja parovi $(2, 1998)$ i $(0, -1996)$. 5 bodova

2. Ako je R polumjer kružnice, tada vrijedi:

$$P(ABC) = \frac{|AB| \cdot |AC| \cdot |BC|}{4R}, \quad P(ACD) = \frac{|AC| \cdot |AD| \cdot |CD|}{4R}.$$



10 bodova

Zbrajanjem dobivamo

$$P(ABCD) = \frac{|AC|}{4R}(|AB| \cdot |BC| + |AD| \cdot |DC|).$$

Slično je

$$P(AECF) = \frac{|AC|}{4R}(|AE| \cdot |EC| + |AF| \cdot |FC|).$$ 10 bodova

pa dijeljenjem slijedi

$$\frac{P(ABCD)}{P(AECF)} = \frac{|AB| \cdot |BC| + |AD| \cdot |DC|}{|AE| \cdot |EC| + |AF| \cdot |FC|}.$$ 5 bodova

Napomena. Postoji i rješenje pomoću trigonometrije.

3. Za $b = 1$ svi su logaritmi jednaki 0. 5 bodova

Za $b > 0, b \neq 1$ dani uvjet možemo pisati u obliku

$$\frac{1}{\log_b a} - \frac{1}{\log_b a + 1} = \frac{1}{\log_b a + 2} - \frac{1}{\log_b a + 3}.$$ 10 bodova

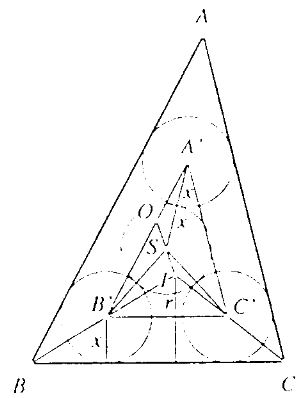
Neka je $\log_b a = x$. Tada imamo jednadžbu:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$$

čije je rješenje $x = -\frac{3}{2}$. 5 bodova

Zato je $\log_a b = -\frac{2}{3}$, $\log_{ab} b = -2$, $\log_{ab^2} b = 2$ i $\log_{ab^3} b = \frac{2}{3}$. 5 bodova

4. Središta A', B', C' prvih triju kružnica leže na simetralama AI, BI, CI kutova A, B, C, pa je točka I središte homotetije koja preslikava trokut ABC u trokut $A'B'C'$.



5 bodova

Iz $|SA'| = |SB'| = |SC'| = 2x$ slijedi da kružnica opisana trokutu $A'B'C'$ ima središte S i polumjer $2x$. 5 bodova

Zato spomenuta homotetija preslikava točku O u točku S pa su točke S, O i I kolinearne. 5 bodova

Trokut $A'B'C'$ ima polumjer upisane kružnice $r - x$, pa iz homotetije slijedi

$$r : (r - x) = R : 2x \quad \text{tj.} \quad x = \frac{Rr}{R + 2r}.$$ 10 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

12. travnja 1997.

III. razred

1. Neka je a neki realni broj. Riješi sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)\cdot x_4 &= a\\ (x_1+x_2+x_4)\cdot x_3 &= a\\ (x_1+x_3+x_4)\cdot x_2 &= a\\ (x_2+x_3+x_4)\cdot x_1 &= a.\end{aligned}$$

2. U trokutu ABC povučene su simetrale kutova AD i BE (D i E su točke na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$). Nađite kut $\gamma = \sphericalangle BCA$ ako je $|AD|\cdot|BC| = |BE|\cdot|AC|$ i $|AC| \neq |BC|$.

3. Ravnina siječe bočne bridove $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ i $\overline{SD}$ pravilne četverostrane piramide u točkama M, N, P i Q, tim redom. Dokažite da je

$$\frac{1}{|\overrightarrow{SM}|}+\frac{1}{|\overrightarrow{SP}|}=\frac{1}{|\overrightarrow{SN}|}+\frac{1}{|\overrightarrow{SQ}|}.$$

4. U tetraedru $SABC$ poznati su kutovi između pobočnih bridova: $\sphericalangle BSC = \alpha$, $\sphericalangle CSA = \beta$ i $\sphericalangle ASB = \gamma$. Odredite kutove između pobočaka.

Rješenja zadataka za 3. razred.
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Označimo li $s := x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} (s - x_4) \cdot x_4 &= a \\ (s - x_3) \cdot x_3 &= a \\ (s - x_2) \cdot x_2 &= a \\ (s - x_1) \cdot x_1 &= a. \end{aligned}$$

Dakle svi x_i zadovoljavaju kvadratnu jednadžbu

$$x_i^2 - sx_i + a = 0.$$

Slijedi da u uređenoj četvorci (x_1, x_2, x_3, x_4) mogu biti najviše dvije različite vrijednosti.

5 bodova

- Ako su svi x_i međusobno jednaki (i npr. jednaki x), onda je $3x \cdot x = a$, te su dva rješenja $(\sqrt{a/3}, \sqrt{a/3}, \sqrt{a/3}, \sqrt{a/3})$ i $(-\sqrt{a/3}, -\sqrt{a/3}, -\sqrt{a/3}, -\sqrt{a/3})$.
  Za negativni a ovaj slučaj ne daje niti jedno rješenje, za nulu jedno, za pozitivni dva.

  5 bodova

- Ako su tri x_i međusobno jednaka (i jednaka npr. x_1), a četvrti različit (x_2), onda imamo $x_i^2 - (3x_1 + x_2)x_i + a = 0$, za $i = 1, 2$. Rješavanjem ovog sustava (oduzimanje jedne od druge jednadžbe i faktoriziranje) dobivamo ili $x_1 = x_2$ (rješenje pripada prvom slučaju) ili $x_1 = 0$, $x_2 = c \neq 0$ (proizvoljan).
  Za $a \neq 0$ ovaj slučaj ne daje niti jedno novo rješenje, a za $a = 0$ daje četiri: $(0, 0, 0, c), (0, 0, c, 0), (0, c, 0, 0), (c, 0, 0, 0)$.

  5 bodova

- Ako su dva po dva rješenja jednaka, dobivamo kvadratnu jednadžbu $x_i^2 - 2(x_1 + x_2)x_i + a = 0$. Rješavanjem slijedi $x_1 = -x_2 \neq 0$.

  5 bodova

  Za $a = 0$ ovaj slučaj ponovno ne daje ništa novog, za pozitivne brojeve a ne daje niti jedno rješenje, a za negativne a daje 6 različitih rješenja tipa $(-\sqrt{-a}, -\sqrt{-a}, \sqrt{-a}, \sqrt{-a})$ (minus predznaci na raznim mjestima).

  5 bodova

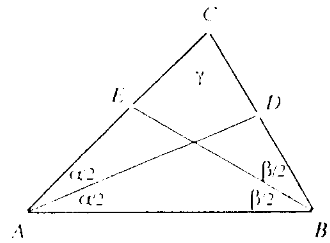
2. Kako je $|AC| \neq |BC|$, to je $\alpha \neq 3$.
Primjenom sinusovog poučka na $\triangle BCE$ dobivamo $\frac{|BC|}{|BE|} = \frac{\sin \sphericalangle CEB}{\sin \gamma}$
$= \frac{\sin(\frac{\alpha}{2} - \gamma)}{\sin \gamma}$. Analogno se iz trokuta ADC dobiva $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{\sin \gamma}{\sin(\frac{\alpha}{2} + \gamma)}$. 10 bodova
Zato je

$$\frac{|BC|}{|BE|}\cdot\frac{|AD|}{|AC|}=\frac{\sin(\frac{\beta}{2}+\gamma)}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)}.$$

Kako je lijeva strana jednaka 1, dobiva se

$$\sin(\frac{\beta}{2}+\gamma)=\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma).$$

10 bodova

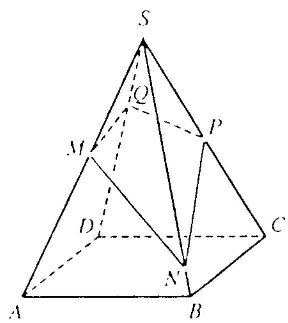


Zbog $\alpha\neq\beta$, mora biti

$$\frac{\beta}{2}+\gamma=\pi-\frac{\alpha}{2}-\gamma \quad\Leftrightarrow\quad 2\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi \quad\Leftrightarrow\quad 2\gamma+\frac{\pi-\gamma}{2}=\pi \text{ tj. } \gamma=\frac{\pi}{3}.$$

5 bodova

3. Ne smanjujući općenitost možemo staviti $|SA| = |SB| = |SC| = |SD| = 1$. Nadalje, neka je $|SM| = a$, $|SN| = b$, $|SP| = c$ i $|SQ| = d$.



Vektori $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{NP}$ i $\overrightarrow{NQ}$ su komplanarni i $\overrightarrow{NM}\not\parallel\overrightarrow{NP}$, pa zato postoje jedinstveni brojevi x i y, takvi da je $\overrightarrow{NQ}=x\overrightarrow{NM}+y\overrightarrow{NP}$. 5 bodova

Prikažimo obje strane ove jednakosti pomoću linearno nezavisnih vektora $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ i $\overrightarrow{SC}$. $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{SM}-\overrightarrow{SN}=a\overrightarrow{SA}-b\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{SP}-\overrightarrow{SN}=c\overrightarrow{SC}-b\overrightarrow{SB}$; 5 bodova

$$\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{SQ}-\overrightarrow{SN}=d\overrightarrow{SD}-b\overrightarrow{SB}=d(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD})-b\overrightarrow{SB}$$
$$=d(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})-b\overrightarrow{SB}=d\overrightarrow{SA}-(d+b)\overrightarrow{SB}+d\overrightarrow{SC}.$$

5 bodova

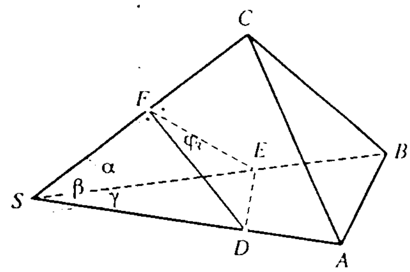
Sada dobivamo,

$$d\overrightarrow{SA}-(d+b)\overrightarrow{SB}+d\overrightarrow{SC}=ax\overrightarrow{SA}-b(x+y)\overrightarrow{SB}+cy\overrightarrow{SC}.$$

5 bodova

Odavde, zbog linearne nezavisnosti vektora $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ i $\overrightarrow{SC}$, slijedi $d = ax$, $d + b = b(x+y)$ i $d = cy$ pa je $x + y = \frac{d}{a} + \frac{d}{c} = \frac{d+b}{b}$ tj. $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$. 5 bodova

4. Neka su traženi kutovi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Odredimo npr. φ_3, (vidi sliku). Na bridu $\overline{SC}$ uzmimo bilo koju točku F, takvu da ravnina, DEF okomita na SF, siječe bridove SA i SB u točkama D i E. Sada je traženi kut $\varphi_3 = \sphericalangle EFD$. 5 bodova



Slika 2 boda

Pomoću kosinusovog poučka izrazimo $|ED|^2$ iz $\triangle EFD$, kao i iz $\triangle ESD$, te izjednačimo dobivene izraze:

$$|FE|^2 + |FD|^2 - 2|FE| \cdot |FD| \cos\varphi_3 = |SE|^2 + |SD|^2 - 2|SE| \cdot |SD| \cos\gamma \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 2|FE| \cdot |FD| \cos\varphi_3 &= 2|SE| \cdot |SD| \cos\gamma - (|SE|^2 - |FE|^2) - (|SD|^2 - |FD|^2) \\ &= 2|SE| \cdot |SD| \cos\gamma - 2|SF|^2. \end{aligned}$$

7 bodova

Uvrstimo u tu jednakost: $|FE| = |SF|\mathrm{tg}\alpha$, $|FD| = |SF|\mathrm{tg}\beta$, $|SE| = \frac{|SF|}{\cos\alpha}$, $|SD| = \frac{|SF|}{\cos\beta}$ i podijelimo sa $|SF|^2$. Dobivamo

$$\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta\cos\varphi_3 = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_3 = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta};$$

7 bodova

I analogno,

$$\cos\varphi_2 = \frac{\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha} \quad \text{i} \quad \cos\varphi_1 = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

4 boda

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

12. travnja 1997.

IV. razred

1. Neka su m i n prirodni brojevi i $n > 2$. Dokažite da $2^m + 1$ nije djeljiv s $2^n - 1$.

2. Dokažite da za svaku točku z kompleksne ravnine, za koju je $|z-1| = 1$, točka $\frac{1}{z}$ leži na jednom te istom pravcu. Na kojem?

3. Nađite najmanji prirodan broj koji ima točno 30 djelitelja.

4. Neka je
$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1 + \frac{1}{3}, \quad \ldots$$
$$c_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1}.$$
Dokažite da vrijedi
$$c_n^2 + 2(c_n - c_1)^2 + 2(c_n - c_2)^2 + \ldots + 2(c_n - c_{n-1})^2 = n.$$

Rješenja zadataka za 4. razred.
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Ako je $m < n$, onda $2^m + 1$ nije djeljiv s $2^n - 1$, jer za $m < n$ i $n > 2$ je $2^m + 1 < 2^n - 1$. Naime,
$2^n - 1 - (2^m + 1) = 2^m(2^{n-m} - 1) - 2 > 0$, osim za $m = 1$ i $n = 2$, ali prema uvjetima mora biti $n > 2$. 10 bodova
Ako je $m \geq n$ vrijedi $m = an + b$, $a \in \mathbf{N}$, $b \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Nadalje,

$$\frac{2^m + 1}{2^n - 1} = \frac{2^m - 2^b}{2^n - 1} + \frac{2^b - 1}{2^n - 1} = \frac{2^{an-b} - 2^b}{2^n - 1} + \frac{2^b - 1}{2^n - 1}$$

$$= 2^b \cdot \frac{2^{an} - 1}{2^n - 1} + \frac{2^b - 1}{2^n - 1} = 2^b(2^{(a-1)n} + 2^{(a-2)n} + \ldots + 1) + \frac{2^b + 1}{2^n - 1}.$$

Ovo ne može biti prirodan broj jer, prema prvom dijelu, zbog $b < n$, $2^b + 1$ nije djeljivo s $2^n - 1$. 15 bodova

2. Ako je $|z - 1| = 1$, onda je $z - 1 = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, odnosno $z = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. 10 bodova
Odavde slijedi:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + \cos\varphi + i\sin\varphi} \cdot \frac{1 + \cos\varphi - i\sin\varphi}{1 + \cos\varphi - i\sin\varphi} = \frac{1 + \cos\varphi - i\sin\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}$$

$$= \frac{1 + \cos\varphi - i\sin\varphi}{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{1 + \cos\varphi - i\sin\varphi}{2(1 + \cos\varphi)} = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sin\varphi}{2(1 + \cos\varphi)}.$$

10 bodova
Stoga sve točke $\frac{1}{z}$ kompleksne ravnine, uz uvjet $|z - 1| = 1$, leže na pravcu $\Re z = \frac{1}{2}$.
5 bodova

Napomena. Može se raditi i direktno, bez prelaska na trigonometrijski oblik kompleksnog broja.

3. Neka je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ jedinstveni rastav broja n na proste faktore (p_i su međusobno različiti prosti faktori, $\alpha_i > 0$). Tada je broj djelitelja broja n jednak

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k - 1).$$

U našem slučaju je $30 = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1)$ za neke $k \in \mathbf{N}$, $\alpha_i \in \mathbf{N}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ 10 bodova
Kako je $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, moguća rješenja su

k	$\alpha_i + 1$	α_i
3	2, 3, 5	1, 2, 4
2	2, 15	1, 14
2	3, 10	2, 9
2	5, 6	4, 5
1	30	29

5 bodova

Tražimo brojeve p_i tako da n bude minimalan. Primijetimo da je bolje stavljati manje potencije uz veće proste faktore. 5 bodova

Konačno, najmanji od produkata $5^1 \cdot 3^2 \cdot 2^4 = 720$, $3^1 \cdot 2^{14} = 49\,152$, $3^2 \cdot 2^9 = 4\,608$, $3^4 \cdot 2^5 = 2\,592$, $2^{29} = 536\,870\,912$ je 720. 5 bodova

4. Prvo rješenje. Dokaz matematičkom indukcijom.

$n = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1^2 = 1;$

$n = 2 \quad \Rightarrow \quad c_2^2 + 2(c_2 - c_1)^2 = \frac{16}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} = 2.$ 5 bodova

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo da ona vrijedi i za $n+1$:

$$A = c_{n+1}^2 + 2(c_{n+1} - c_1)^2 + \ldots + 2(c_{n+1} - c_{n-1})^2 + 2(c_{n+1} - c_n)^2$$

$$= (c_n + \frac{1}{2n+1})^2 + 2(c_n + \frac{1}{2n+1} - c_1)^2 + \ldots + 2(c_n + \frac{1}{2n+1} - c_{n-1})^2 + 2(\frac{1}{2n+1})^2$$

$$= \text{po pretp.} = n + 2[c_n + 2(c_n - c_1) + \ldots + 2(c_n - c_{n-1})] \cdot \frac{1}{2n+1} + [1 + 2(n-1) + 2] \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

5 bodova

Sada računamo:

$$\begin{aligned}
2(c_n - c_1) + \ldots + 2(c_n - c_{n-1}) = 2 \Bigg[& \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \\
& + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \\
& + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \\
& \qquad \ddots \qquad \vdots \\
& + \frac{1}{2n-1} \Bigg]
\end{aligned}$$

$$= 2\left[\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \ldots + \frac{n-1}{2n-1}\right] = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \ldots + \frac{2n-2}{2n-1}$$

$$= n - 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right) = n - 1 - (c_n - 1) = n - c_n,$$

10 bodova

pa je

$$A = n + 2(c_n + n - c_n) \cdot \frac{1}{2n+1} + (2n+1) \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} = n + 1.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi i za $n+1$, te stoga i za svaki prirodan broj n. 5 bodova

Drugo rješenje.

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2$$

$$+2\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2+\ldots+2\cdot\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2$$

$$=1\cdot\left[\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2\right]$$

$$+3\cdot\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2\right]$$

$$+5\cdot\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2\right]+\ldots+(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2$$

$$=1\cdot\left(1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\ldots+\frac{2}{2n-1}\right)+3\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\ldots+\frac{2}{2n-1}\right)$$

$$+5\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}+\ldots+\frac{2}{2n-1}\right)+\ldots+\frac{1}{2n-1}=1+\frac{3}{3}+\frac{5}{5}+\frac{7}{7}+\ldots+\frac{2n-1}{2n-1}=n.$$

25 bodova