MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske

25. ožujka 2002. godine

Zadaci za 7. razred

1. Riješi jednadžbu
$$\frac{\frac{23}{3}+\frac{39}{2}:4.5}{\frac{3}{5}:0.1+4.2}=\frac{2x}{\frac{21}{6}+\frac{61}{2}}.$$

2. Jednom testiranju za sudjelovanje u kvizu znanja prisustvovala su 64 kandidata. Nakon testiranja testove kandidata ispravljala su dva profesora. Svaki od profesora ispravio je 32 testa, a svaki od svojih testova ispravljao je jednako dugo. Prvi je profesor ispravio 5 testova za isto vrijeme za koje je drugi profesor ispravio 4 testa. Prvi je profesor svoja 32 testa ispravio 1 sat i 36 minuta prije nego što je drugi profesor ispravio sve svoje testove. Koliko je testova za 1 sat ispravio prvi, a koliko drugi profesor?

3. Ako je $a < b$ i $b < 3$, onda je $13a < 4b + 28$. Dokaži.

4. Dan je paralelogram $ABCD$. Na dijagonali $\overline{BD}$ odabrana je točka M, tako da je $|BM| : |MD| = 2 : 7$. Pravac AM siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki N. U kojem omjeru točka N dijeli stranicu $\overline{BC}$?

5. Dan je jednakokračni trokut ABC u kojem je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = 80^\circ$. Na kraku $\overline{AC}$ odabrana je točka D, a na kraku $\overline{BC}$ točka E, tako da je $\sphericalangle DBE = 30^\circ$ i $\sphericalangle DAE = 40^\circ$. Odredi veličine kutova $\sphericalangle BDE$ i $\sphericalangle AED$.

ŽN 2002.

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 7. RAZRED

ZA SVAKI OD ZADATAKA OVDJE SU DANI NEKI OD MOGUĆIH NAČINA RJEŠAVANJA. UKOLIKO JE UČENIK ZADATAK RJEŠAVAO NA DRUGAČIJI NAČIN, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE ADEKVATNO BODOVATI I OCIJENITI NJEGOV RAD.

1. Da bismo mogli riješiti jednadžbu, prvo treba izračunati vrijednosti izraza u brojniku razlomka na njenoj lijevoj strani te nazivnicima razlomaka na njene obje strane. Vrijednost brojnika na lijevoj strani jednadžbe je

$$\frac{23}{3}+\frac{39}{2}:4.5=\frac{23}{3}+\frac{39}{2}\cdot\frac{2}{9}=\frac{23}{3}+\frac{13}{3}=12.$$ 3 BODA

Nadalje, nazivnik razlomka na lijevoj strani jednadžbe iznosi

$$\frac{3}{5}:0.1+4.2=\frac{3}{5}\cdot 10+\frac{21}{5}=\frac{30}{5}+\frac{21}{5}=\frac{51}{5}=10.2.$$ 2 BODA

Konačno, u nazivniku razlomka na desnoj strani imamo

$$\frac{21}{6}+\frac{61}{2}=\frac{21}{6}+\frac{183}{6}=34.$$ 1 BOD

Prema tome, zadana jednadžba ima oblik $\dfrac{12}{\frac{51}{5}}=\dfrac{2x}{34}$, tj. $12\cdot\dfrac{5}{51}=\dfrac{x}{17}$, 2 BODA

odnosno $\dfrac{20}{17}=\dfrac{x}{17}$, 1 BOD

odakle je $x=20$. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Učenik je jednadžbu mogao riješiti i računajući s brojevima u decimalnom zapisu umjesto s razlomcima.

Jednadžba je tada $\dfrac{12}{10.2}=\dfrac{2x}{34}$, odakle je $\dfrac{12}{10.2}=\dfrac{x}{17}$, 1 BOD

tj. $10.2x=12\cdot 17$, 1 BOD

odnosno $10.2x=204$, 1 BOD

pa je $x=204:10.2$, tj. $x=20$. 1 BOD

....

2. 1. način. Neka je x u satima izraženo vrijeme za koje je prvi profesor ispravio 5 testova, a drugi profesor 4 testa.

Tada je prvom profesoru za ispravljanje jednog testa trebalo $\frac{x}{5}$ sati, a drugome $\frac{x}{4}$ sata. 1 BOD

To znači da je prvi profesor svoja 32 testa ispravio za $\frac{32}{5}x$ sati, a drugi sve svoje testove za $\frac{32}{4}x=8x$ sati. 1 BOD

Preračunajmo sada 1 h 36 min u sate. Budući da je 1 min $=\frac{1}{60}$ h, slijedi da je 1 h 36 min $=\frac{96}{60}$ h $=\frac{8}{5}$ h. 1 BOD

Prema uvjetima zadatka, jer je ispravljanje prvog profesora trajalo 1 h 36 min kraće od ispravljanja drugog profesora, vrijedi jednakost $\frac{32}{5}x+\frac{8}{5}=8x$. 3 BODA

Odavde je $\left(8-\frac{32}{5}\right)x=\frac{8}{5}$, 1 BOD

odnosno $\frac{8}{5}x=\frac{8}{5}$, tj. $x=1$. 1 BOD

Prema tome, prvi je profesor za 1 sat ispravio $5\cdot 1=5$ testova, 1 BOD

a drugi $4\cdot 1=4$ testa. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. način. Označimo sa x u minutama izraženo vrijeme potrebno prvom profesoru da ispravi jedan test. To znači da će on 5 testova ispraviti za $5x$ minuta. 1 BOD

Za isto to vrijeme drugi profesor stigne ispraviti 4 testa, odakle slijedi da mu za ispravljanje jednog testa treba $\frac{5}{4}x$ minuta, 1 BOD

a za ispravljanje sva 32 testa ukupno $32\cdot\frac{5}{4}x=40x$ minuta. 1 BOD

S druge strane, prvi je profesor svoja 32 testa ispravio za $32x$ minuta. 1 BOD

Budući da je prvi profesor ispravljanje završio 1 sat i 36 minuta, tj. 96 minuta ranije od drugog, vrijedi jednakost $32x+96=40x$, 2 BODA

odakle je $8x=96$, tj. $x=12$. 1 BOD

Dakle, prvom profesoru za ispravljanje jednog testa treba 12 minuta, a drugom $\frac{5}{4}\cdot 12=15$ minuta. 1 BOD

Iz toga slijedi da će u jednom satu, tj. u 60 minuta prvi profesor ispraviti $\frac{60}{12}=5$ testova, 1 BOD

a drugi $\frac{60}{15}=4$ testa. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Znak nejednakosti neće se promijeniti pomnožimo li obje strane nejednakosti istim pozitivnim brojem. Zato iz nejednakosti $a < b$ množenjem njene obje strane s 13 slijedi da je $13a < 13b$. 1 BOD

Također, iz nejednakosti $b < 3$, množenjem njene obje strane s 9, dobivamo da je $9b < 27$. 1 BOD

S druge strane, uočimo da vrijedi jednakost $13b = 4b + 9b$. 1 BOD

Znak nejednakosti neće se promijeniti ni dodamo li objema njenim stranama isti broj. Zato dodavanjem $4b$ na obje strane nejednakosti $9b < 27$ dobivamo $4b + 9b < 4b + 27$, 1 BOD

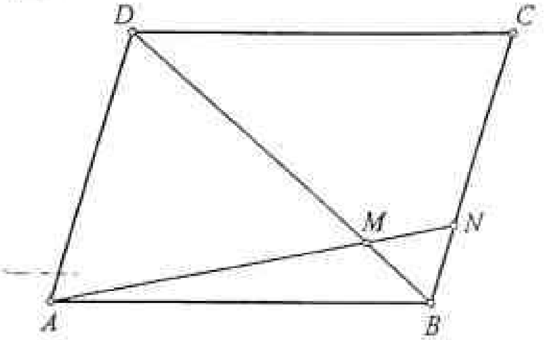
tj. $13b < 4b + 27$. 1 BOD

Sada iz $13a < 13b$ i $13b < 4b + 27$ slijedi da je $13a < 4b + 27$ (tranzitivnost!). 3 BODA

Konačno, zbog $27 < 28$ zaključujemo da onda pogotovo vrijedi $13a < 4b + 28$. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Skica 1 BOD



Uočimo najprije da je $\triangle BMN \sim \triangle AMD$. Zaista, to slijedi iz jednakosti $\measuredangle AMD = \measuredangle BMN$ (vršni kutovi), 1 BOD

te $\measuredangle DAM = \measuredangle MNB$ i $\measuredangle ADM = \measuredangle MBN$ (kutovi s paralelnim krakovima, tj. kutovi uz presječnicu). 2 BODA

Iz dokazane sličnosti trokuta dalje je $|BN| : |AD| = |BM| : |MD|$, odakle po pretpostavci zadatka dobivamo razmjer

$$|BN| : |AD| = 2 : 7.$$ 1 BOD

Budući da je $ABCD$ paralelogram, imamo $|AD| = |BC|$, te je dalje $|BN| : |BC| = 2 : 7$. 1 BOD

Dakle, $|BN| = \frac{2}{7}|BC|$, što znači da je

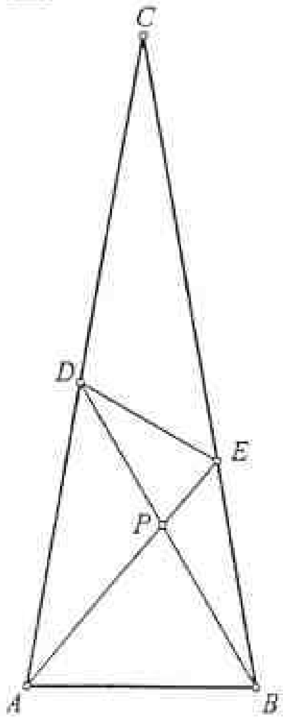
$$|NC| = |BC| - |BN| = |BC| - \frac{2}{7}|BC| = \frac{5}{7}|BC|.$$ 2 BODA

Sada možemo odrediti traženi razmjer. Imamo $|BN| : |NC| = \frac{2}{7}|BC| : \frac{5}{7}|BC| = \frac{2}{7} : \frac{5}{7} = 2 : 5$. 2 BODA

Prema tome, točka N dijeli stranicu $\overline{BC}$ u omjeru $2 : 5$, računajući od vrha B.

.... UKUPNO 10 BODOVA

5.



1. način Skica 1 BOD

Odredimo najprije kutove $\measuredangle EAB$ i $\measuredangle ABD$. Iz podataka danim u tekstu zadatka odmah čitamo da je $\measuredangle EAB = \measuredangle CAB - \measuredangle DAE = 80° - 40° = 40°$ 1 BOD

i $\measuredangle ABD = \measuredangle ABC - \measuredangle DBE = 80° - 30° = 50°$. 1 BOD

Pogledajmo sada trokut ABD. Zbog

$$\measuredangle BDA = 180° - \measuredangle DAB - \measuredangle ABD = 180° - 80° - 50° = 50°,$$ 1 BOD

zaključujemo da je trokut ABD jednakokračan, odakle je $|AB| = |AD|$. 1 BOD

Odavde također slijedi i da su trokuti ABE i ADE sukladni, jer je $\measuredangle EAB = \measuredangle DAE$, $|AB| = |AD|$ i stranica $\overline{AE}$ im je zajednička (primijenimo poučak S – K – S o sukladnosti trokuta). 2 BODA

No, tada je

$$\measuredangle AED = \measuredangle AEB = 180° - \measuredangle EAB - \measuredangle ABE = 180° - 40° - 80° = 60°.$$ 1 BOD

Zbog navedene sukladnosti imamo i jednakost $|BE| = |ED|$, što dalje znači da je trokut DBE jednakokračan. 1 BOD

Zato je $\measuredangle BDE = \measuredangle DBE = 30°$. 1 BOD

Dakle, $\measuredangle AED = 60°$ i $\measuredangle BDE = 30°$.

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. način Skica 1 BOD

Početak dokaza isti je kao kod 1. načina rješavanja. I ovdje prvo odredimo kutove $\measuredangle EAB$ i $\measuredangle ABD$. Imamo $\measuredangle EAB = \measuredangle CAB - \measuredangle DAE = 80° - 40° = 40°$ 1 BOD

i $\measuredangle ABD = \measuredangle ABC - \measuredangle DBE = 80° - 30° = 50°$. 1 BOD

Također, iz $\measuredangle BDA = 180° - \measuredangle DAB - \measuredangle ABD = 180° - 80° - 50° = 50°$ 1 BOD

slijedi da je trokut ABD jednakokračan, pri čemu je $|AB| = |AD|$. 1 BOD

Od ovog mjesta dokazi se razlikuju. Neka je točka P presjek dužina $\overline{AE}$ i $\overline{BD}$. Budući da je $\measuredangle DAP = \measuredangle DAE = 40°$ i $\measuredangle PAB = \measuredangle EAB = 40°$, pravac AP, tj. pravac AE je simetrala kuta $\measuredangle DAB$ jednakokračnog trokuta ABD. 1 BOD

Zato je AE ujedno i simetrala dužine $\overline{BD}$, 1 BOD

odakle slijedi da je $|BE| = |DE|$, tj. trokut BED je jednakokračan. 1 BOD

Prema tome, $\measuredangle BDE = \measuredangle DBE = 30°$. 1 BOD

Konačno, iz pravokutnog trokuta DPE ($PD \perp PE$) čitamo

$$\measuredangle AED = \measuredangle PED = 180° - \measuredangle PDE - \measuredangle DPE = 180° - \measuredangle BDE - 90° = 180° - 30° - 90° = 60°.$$ 1 BOD

Dakle, $\measuredangle BDE = 30°$ i $\measuredangle AED = 60°$.

.... UKUPNO 10 BODOVA