Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – osnovna škola

29. siječnja 2007.

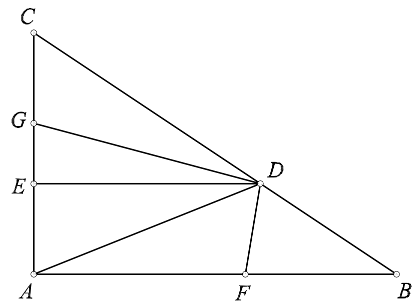
1. U brojevnom izrazu $5 \cdot 6 + 12 : 3 - 2$ stavi zagrade tako da vrijednost izraza bude
   (a) 12
   (b) 28.

2. S obje strane ceste zasađen je drvored breza u jednakim razmacima od 6 m. Kolika je duljina tog drvoreda ako je ukupno posađeno 176 stabala breze?

3. Tri ribara su zajedno ulovila 146 kg ribe. Kada je prvi prodao 23 kg, drugi 19 kg, a treći 32 kg ostala im je jednaka količina ribe. Koliko je svaki od njih ulovio?

4. Ivana je za rođendan od svojih prijatelja dobila 24 ruže. Ruže su bile bijele, žute i crvene boje. Bijelih je bilo dva puta manje od žutih, a crvenih koliko bijelih i žutih zajedno. Koliko je bilo bijelih, koliko žutih, a koliko crvenih ruža?

5. Napiši sve trokute sa slike:



Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

5. razred – osnovna škola

29. siječnja 2007.

1. Izračunaj:

$$73 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot (45 + 3105 : 9)] - 125 + 25 \cdot (48 - 45 : 3)\,.$$

2. Napišimo jednog iza drugog, bez razmaka, prirodne brojeve:

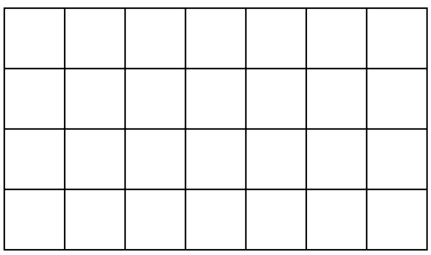
$$12345678910111213141516171819202122232425\ldots$$

Koja se znamenka nalazi na 2007. mjestu?

3. Odredi sve četveroznamenkaste brojeve koji pri dijeljenju s 13 daju ostatak 4, pri dijeljenju s 15 daju ostatak 6 i pri dijeljenju s 18 daju ostatak 9.

4. Vino u boci stoji 40 kuna. Vino je 7 puta skuplje od boce. Koliko stoji boca, a koliko vino?

5. Koliko je ukupno pravokutnika na slici?



Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

6. razred – osnovna škola

29. siječnja 2007.

1. Izračunaj:

$$\left[\frac{7.5\cdot 0.028}{\frac{3}{4}-0.36:0.6}-\left(\frac{1}{15}+\frac{3}{8}+0.725\right):1\frac{1}{6}\right]:\left(4.5-3\frac{4}{7}\right):\frac{28}{65}$$

2. Ivan je planirao pročitati knjigu za lektiru za 3 dana. Prvog je dana pročitao $\frac{1}{3}$ knjige, drugog $\frac{2}{5}$ knjige i zadovoljno ustvrdio da mu je za treći dan preostalo pročitati 28 stranica manje nego što je pročitao drugog dana. Koliko knjiga ima stranica?

3. Koliki kut zatvaraju mala i velika kazaljka na satu u 5 sati i 12 minuta?

4. Neka točke A i B pripadaju kružnici k sa središtem S i polumjerom r, te neka je $|AB| < 2r$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki P, a kružnicu k u točkama C i D, pri čemu su točke C i S s iste strane pravca AB. Dokaži da je $|PD| < |PB|$.

5. Odredi šiljaste kutove pravokutnog trokuta s pravim kutem pri vrhu C, ako je kut između visine i simetrale kuta iz vrha C jednak $\frac{1}{9}$ tupog kuta kojeg čine simetrale šiljastih kutova.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – osnovna škola

29. siječnja 2007.

1. Izračunaj

$$\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{4}-1}\right):\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}}+2-\frac{2}{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}}\right)$$

2. Ante i Ivan mogu završiti neki posao, radeći zajedno, za 8 dana. Nakon 2 dana zajedničkog rada razbolio se Ante, a Ivan je dovršio ostatak posla za 9 dana. Za koliko bi dana završio taj posao Ante, a za koliko Ivan, ako bi radili svaki za sebe?

3. Neposredno nakon žetve, vlažnost pšeničnog zrna iznosila je 16%, a nakon sušenja 12.5%. Kolika je masa suhog pšeničnog zrna ako je prinos žetve iznosio 4.5 tona?

4. Zadan je trokut ABC, pri čemu je $|AC| > |AB|$. Unutar trokuta je dana točka N takva da dužina $\overline{AN}$ raspolavlja kut $\sphericalangle BAC$ i $\overline{AN} \perp \overline{BN}$. Ako je M polovište stranice $\overline{BC}$ onda je

$$|MN| = \frac{|AC| - |AB|}{2}.$$

Dokaži!

5. Zadan je paralelogram $ABCD$ takav da je $|AB| = 2|BC|$. Na stranici $\overline{AB}$ je dana točka E takva da je DE simetrala kuta $\sphericalangle CDA$ i BD je simetrala kuta $\sphericalangle CDE$. Odredi veličine kutova paralelograma.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

8. razred – osnovna škola

29. siječnja 2007.

1. Riješi jednadžbu

$$\left(5x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(4x-\frac{1}{2}\right)^2=\left(3x-\frac{1}{3}\right)^2.$$

2. Izračunaj

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

3. Na kružnici polumjera 8 cm istaknuta je tetiva $\overline{AB}$ takva da je $|AB| =$ 12 cm. U točki A povučena je tangenta t na kružnicu, a iz točke B povučena je tetiva $\overline{BC}$, paralelna tangenti t. Odredi udaljenost između tangente t i tetive $\overline{BC}$.

4. Dokaži da okomica na dužinu koja spaja nožišta dviju visina šiljastokutnog trokuta, povučena iz polovišta te dužine, dijeli treću stranicu trokuta na dva jednaka dijela.

5. Odredi površinu trapeza ako je $|AB| = 11$ cm, $|BC| = 5$ cm, $|CD| =$ 7 cm i $|AD| = 3$ cm.

RJEŠENJA ZA 4. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. (a) $(5 \cdot 6 + 12) : 3 - 2 = 12$ **5 BODOVA**
(b) $5 \cdot (6 + 12) : 3 - 2 = 28$. **5 BODOVA**
. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

2. Sa svake strane ceste posađeno je $176 : 2 = 88$ stabala. **2 BODA**
Broj razmaka između susjednih stabala istog reda manji je za 1 od broja stabala tog reda. **2 BODA**
Dakle, na svakoj strani ceste je $88 - 1 = 87$ razmaka. **2 BODA**
Duljina tog drvoreda jednaka je zbroju duljina svih razmaka s jedne strane ceste, odnosno umnošku broja razmaka i duljine razmaka s jedne strane ceste. **2 BODA**
Konačno, duljina drvoreda breza je je $87 \cdot 6 = 522$ m. **2 BODA**
. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

3. Ribari su prodali $23 + 19 + 32 = 74$ kg ribe. **1 BOD**
Nakon što su prodali taj dio ribe ostalo im je $146 - 74 = 72$ kg ribe.
Kako su nakon te prodaje imali iste količine ribe, svima im je ostalo po $72 : 3 = 24$ kg ribe. **3 BODA**
Dakle, prvi ribar je ulovio $24 + 19 = 43$ kg ribe. **2 BODA**
Drugi ribar je ulovio $24 + 23 = 47$ kg ribe. **2 BODA**
Konačno, treći ribar je ulovio $24 + 32 = 56$ kg ribe. **2 BODA**
. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

4. Zadatak rješavamo grafički:
Bijele ruže: _ Žute ruže: _ _ Crvene ruže : _ _ _ **3 BODA**
Imamo 6 dužina pa jedna dužina iznosi $24 : 6 = 4$. **4 BODA**
Prema tome, bijelih je ruža bilo 4, žutih $2 \cdot 4 = 8$, a crvenih $4 + 8 = 12$. **3 BODA**
. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

5. Trokuti koji se sastoje od jednog komada su CGD, GED, EAD, AFD i DFB. **5 BODOVA**
Trokuti koji se sastoje od dva komada su DAB, GAD i CED. **3 BODA**
Trokut koji se sastoji od tri komada je CAD. **1 BOD**
Konačno imamo još trokut ABC, dakle 10 trokuta. **1 BOD**
. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

RJEŠENJA ZA 5. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Imamo redom:

$$\begin{aligned}&73 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot (45 + 3105 : 9)] - 125 + 25 \cdot (48 - 45 : 3)\\ &= 73 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot (45 + 345)] - 125 + 25 \cdot (48 - 15)\\ &= 73 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot 390] - 125 + 25 \cdot 33\end{aligned}$$

5 BODOVA

$$= 73 + 2 \cdot 617 - 125 + 825 = 73 + 1234 - 125 + 825 = 2007.$$

5 BODOVA

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

2. Da bi se napisali svi jednoznamenkasti brojevi potrebno je $9 \cdot 1 = 9$ znamenki. **1 BOD**

Da bi se napisali svi dvoznamenkasti brojevi potrebno je $90 \cdot 2 = 180$ znamenki. **1 BOD**

Da bi se napisali svi troznamenkasti brojevi potrebno je $900 \cdot 3 = 2700$ znamenki. **1 BOD**

Broj u kojem se nalazi tražena znamenka je troznamenkasti jer je $189 < 2007 < 189 + 2700$. **2 BODA**

Za troznamenkaste brojeve, zaključno sa 2007. znamenkom, ostaje $2007 - 189 = 1818$ znamenki od kojih se može napisati $1818 : 3 = 606$ troznamenkastih brojeva. **2 BODA**

Prema tome, tražena znamenka je posljednja znamenka u 606. troznamenkastom broju. **1 BOD**

Taj 606. troznamenkasti broj je $9 + 90 + 606 = 705$, pa je na 2007. mjestu znamenka 5. **2 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

3. Neka je n broj s traženim svojstvom. Lako se odredi da je $V(13, 15, 18) = 1170$. **1 BOD**

Kako je $13 - 4 = 9$, $15 - 6 = 9$ i $18 - 9 = 9$, onda je $n = 1170 \cdot k - 9$, pri čemu je $k \in \mathbf{N}$. **1 BOD**

Kako je n četveroznamenkasti broj, slijedi da su traženi brojevi $1161, 2331, 3501, 4671, 5841, 7011, 8181$ i 9351. **8 BODOVA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

4. Zadatak rješavamo grafički:
Boca: _ Vino: _ _ _ _ _ _ _ **2 BODA**
Imamo 8 dužina pa jedna dužina iznosi $40 : 8 = 5$ kn. **4 BODA**
Prema tome, boca stoji 5 kn, a vino $7 \cdot 5 = 35$ kn. **4 BODA**
. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

5. Pravokutnik je jednoznačno određen dužinom i širinom.
Da bismo odredili dužinu pravokutnika, treba odrediti početak i kraj te dužine.
Kako horizontalno imamo 8 točaka, dvije možemo odabrati na $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ načina.
Rezultat smo dijelili s dva jer su na takav način sve dužine uračunate dvaput. **3 BODA**
Analogno, da bismo odredili širinu pravokutnika potrebno je odrediti početak i kraj te dužine. Vertikalno imamo 5 točaka, pa širinu pravokutnika možemo odabrati na $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ načina. **3 BODA**
Konačno, svaku dužinu možemo kombinirati sa svakom širinom, pa je ukupan broj pravokutnika jednak $28 \cdot 10 = 280$. **4 BODA**
. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

RJEŠENJA ZA 6. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Imamo redom:

$$\left[\frac{7.5\cdot 0.028}{\frac{3}{4}-0.36:0.6}-\left(\frac{1}{15}+\frac{3}{8}+0.725\right):1\frac{1}{6}\right]:\left(4.5-3\frac{4}{7}\right):\frac{28}{65}$$
$$=\left[\frac{0.21}{0.75-0.6}-\left(\frac{53}{120}+\frac{29}{40}\right):\frac{7}{6}\right]:\left(\frac{9}{2}-\frac{25}{7}\right):\frac{28}{65}=$$

3 BODA

$$=\left[\frac{0.21}{0.15}-\frac{140}{120}:\frac{7}{6}\right]:\frac{13}{14}:\frac{28}{65}=\left[\frac{7}{5}-1\right]:\frac{13}{14}:\frac{28}{65}=\frac{2}{5}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{65}{28}=1$$

7 BODOVA

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

2. Neka knjiga ima x stranica. Tada je Ivan prvog dana pročitao $\frac{1}{3}x$ stranica, drugog $\frac{2}{5}x$, a trećeg $\frac{2}{5}x-28$ stranica. **4 BODA**

Prema tome, vrijedi jednadžba $\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}x+\frac{2}{5}x-28=x$. **3 BODA**

Odatle je $\frac{17}{15}x=x+28$, tj. $\frac{2}{15}x=28$, odakle je $x=210$. **3 BODA**

.. . . **UKUPNO 10 BODOVA**

3. Velika kazaljka za 60 minuta prijeđe kut od $360°$, a za 1 minutu kut od $360°:60=6°$. **2 BODA**

Mala kazaljka za 60 minuta prijeđe kut od $30°$, a za jednu minutu $30°:60=0.5°$. **2 BODA**

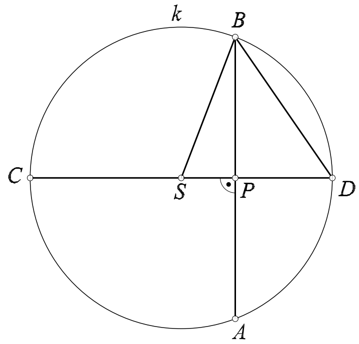
U 5 sati mala i velika kazaljka zatvaraju kut od $5\cdot 30°=150°$. **1 BOD**

Za 12 minuta velika kazaljka prijeđe kut od $12\cdot 6°=72°$, a mala $12\cdot 0.5°=6°$. **2 BODA**

Prema tome, u 5 sati i 12 minuta kazaljke će zatvarati kut od $150°-72°+6°=84°$. **3 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

4.



1 BOD

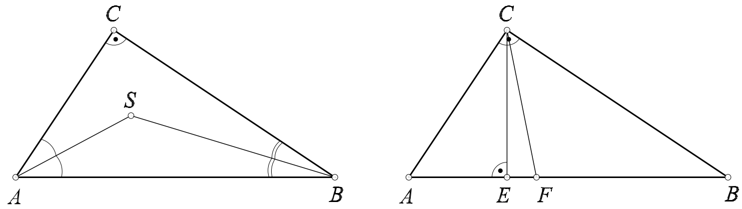
Budući da točke B i D pripadaju kružnici k, slijedi da je $|BS| = |DS|$, odnosno trokut BSD je jednakokračan. To znači da je $\sphericalangle SDB = \sphericalangle DBS$. **3 BODA**

Kako je $\sphericalangle DBP = \sphericalangle DBS - \sphericalangle PBS$, slijedi da je $\sphericalangle DBP < \sphericalangle DBS$ odnosno $\sphericalangle DBP < \sphericalangle SDB$ pa je $\sphericalangle DBP < \sphericalangle PDB$. **3 BODA**

Promotrimo sada trokut PDB. Kako u trokutu nasuprot većeg kuta leži dulja stranica, vrijedi $|PD| < |PB|$, čime je tvrdnja dokazana. **3 BODA**

. . . . **UKUPNO** **10 BODOVA**

5.



1 BOD

Neka je S sjecište simetrala šiljastih kutova pravokutnog trokuta. Označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$. Tada je $\sphericalangle SAB = \frac{\alpha}{2}$ i $\sphericalangle ABS = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. **2 BODA**

Kako je zbroj kutova u trokutu jednak 180°, slijedi da je
$\frac{\alpha}{2} + 45^\circ - \frac{\alpha}{2} + \sphericalangle ASB = 180^\circ$, odakle je $\sphericalangle ASB = 135^\circ$. **3 BODA**

Neka je D nožište visine povučene iz pravog kuta, a E sjecište simetrale pravog kuta s nasuprotnom stranicom. Prema uvjetu zadatka je $\sphericalangle DCE = \frac{135^\circ}{9} = 15^\circ$. **1 BOD**

Kako je CE simetrala pravog kuta slijedi da je $\sphericalangle ACD = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$. **1 BOD**

Iz pravokutnog trokuta ADC slijedi da je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, i konačno, $\sphericalangle ABC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. **2 BODA**

. . . . **UKUPNO** **10 BODOVA**

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Imamo redom: $\left(\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{\frac{1}{4}-1}\right):\left(\dfrac{1}{1-\frac{3}{4}}+2-\dfrac{2}{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}}\right)$

$=\left(\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}-\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{\frac{3}{4}}\right):\left(\dfrac{1}{\frac{1}{4}}+2-\dfrac{2}{\frac{3}{8}}\right)$ **4 BODA**

$=\left(3-\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}\right):\left(6-\dfrac{16}{3}\right)=\left(3-\dfrac{5}{3}\right):\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}:\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{2}=2.$ **6 BODOVA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

2. Mate i Ivan zajedno završe posao za 8 dana, pa slijedi da su za 2 dana obavili $\frac{1}{4}$ posla. **2 BODA**

Kako se nakon dva dana Mate razbolio, Ivan je preostale $\frac{3}{4}$ posla obavio sam.
Neka je x vrijeme u satima potrebno da Ivan sam završi posao. Kako je $\frac{3}{4}x=9$, slijedi da je $x=12$, tj. Ivan sam završi posao za 12 dana. **4 BODA**

Neka je y vrijeme u satima potrebno da Mate sam obavi posao. Kako Ivan i Mate zajedno obave posao za 8 dana slijedi da je $\frac{1}{y}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}$, odakle je $\frac{1}{y}=\frac{1}{24}$, $y=24$, tj. Mate sam obavi posao za 24 dana. **4 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

3. Uspoređujemo masu zrna bez vlage, odnosno suhu tvar. Neka je x ukupna masa zrna nakon sušenja. **1 BOD**

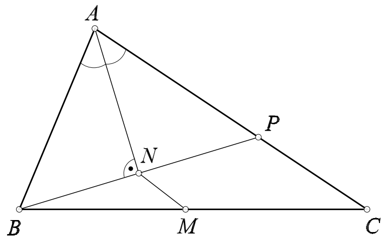
Suha tvar u zrnu neposredno nakon žetve je 84%, a nakon sušenja 87.5%. **2 BODA**

Dakle, 84% od 4500 kg jednako je 87.5% od nepoznate količine suhog pšeničnog zrna,
tj. mora vrijediti $0.84\cdot 4500=0.875x$. **4 BODA**

Rješavanjem gornje jednadžbe dobivamo $x=4320$ kg. **3 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

4.



1 BOD

Produžimo dužinu $\overline{BN}$ preko vrha N do sjecišta P sa stranicom $\overline{AC}$. **1 BOD**

Kako dužina $\overline{AN}$ raspolavlja $\sphericalangle BAC$, tj. $\sphericalangle BAN = \sphericalangle NAP$, te kako pravokutni trokuti BNA i NPA imaju zajedničku stranicu slijedi da su oni sukladni. **2 BODA**

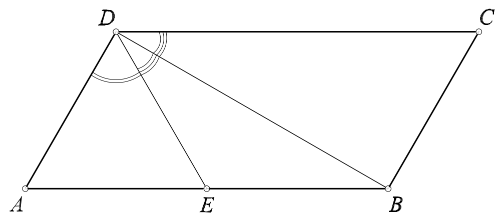
Iz navedene sukladnosti slijedi da je trokut BPA jednakokračan, pa je
$|PC| = |AC| - |AP| = |AC| - |AB|$ **2 BODA**

Kako je $\overline{AN}$ visina jednakokračnog trokuta BPA, slijedi da je N polovište dužine $\overline{BP}$. Kako je M polovište dužine $\overline{BC}$, slijedi da je dužina $\overline{MN}$ srednjica trokuta BCP. **2 BODA**

Zbog toga je $|MN| = \frac{1}{2}|PC| = \frac{|AC|-|AB|}{2}$. **2 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

5.



1 BOD

Označimo $\sphericalangle BDE = x$. Kako je DB simetrala $\sphericalangle CDE$ slijedi da je $\sphericalangle CDB = x$, a kako je DE simetrala $\sphericalangle CDA$, slijedi da je $\sphericalangle EDA = 2x$. **2 BODA**

Kako je $AB \| CD$ slijedi da je $\sphericalangle EBD = x$. Kako je $\sphericalangle AED$ vanjski kut trokuta EBD slijedi da je $\sphericalangle AED = 2x$, pa je trokut AED jednakokračan, tj. $|AD| = |AE|$. **2 BODA**

Nadalje kako je u paralelogramu $|AB| = 2|BC|$, slijedi da je točka E polovište dužine $\overline{AB}$. Trokut EBD je također jednakokračan, tj. $|EB| = |ED|$, zbog čega je trokut AED jednakostraničan. **2 BODA**

Zbog toga je $2x = 60°$, tj. $x = 30°$. Konačno, kutevi paralelograma su $4x = 120°$ i $180° - 120° = 60°$. **3 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Provedemo li u danoj jednadžbi kvadrat razlike, dobivamo

$$25x^2 - 5x + \frac{1}{4} - \left(16x^2 - 4x + \frac{1}{4}\right) = 9x^2 - 2x + \frac{1}{9},$$

6 BODOVA

odnosno, nakon oslobađanja zagrada,

$$25x^2 - 5x + \frac{1}{4} - 16x^2 + 4x - \frac{1}{4} = 9x^2 - 2x + \frac{1}{9}.$$

2 BODA

Sređivanjem obiju strana jednadžbe dobivamo jednadžbu

$$9x^2 - x = 9x^2 - 2x + \frac{1}{9},$$

1 BOD

odakle skraćivanjem i prebacivanjem nepoznanica na lijevu stranu jednadžbe dobivamo $x = \frac{1}{9}$. **1 BOD**

.... **UKUPNO 10 BODOVA**

2. Racionalizirajmo nazivnik u svakom članu danog zbroja. Imamo da je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{1}+\sqrt{2} \\
\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{2}+\sqrt{3} \\
\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} &= \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{-1} = -\sqrt{3}+\sqrt{4} \\
& \cdots \\
\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} &= \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \cdot \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{99}-\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100} = \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1} \\
&= -\sqrt{99}+\sqrt{100}
\end{aligned}$$

5 BODOVA

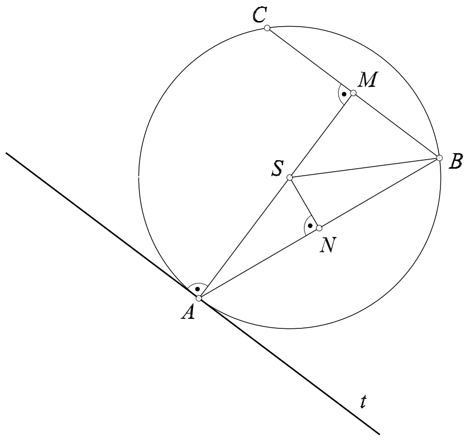
Prema tome, traženi zbroj je jednak

$$-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\cdots-\sqrt{99}+\sqrt{100} = -\sqrt{1}+\sqrt{100} = -1+10 = 9,$$

budući se u danom izrazu krate svi članovi osim prvog i posljednjeg. **5 BODOVA**

.... **UKUPNO 10 BODOVA**

3.



1 BOD

Neka je S središte dane kružnice. Kako je t tangenta kružnice slijedi da je polumjer $\overline{SA}$ okomit na t. Produžimo polumjer $\overline{SA}$ preko točke S do točke M, tj. do sjecišta sa tetivom $\overline{BC}$. Kako je tetiva $\overline{BC}$ paralelna sa tangentom t, slijedi da je dužina $\overline{AM}$ okomita na tetivu $\overline{BC}$ i duljina te dužine je tražena udaljenost. **2 BODA**

Nadalje, neka je N nožište okomice iz središta S na tetivu $\overline{AB}$. Očito, N je polovište te tetive jer je trokut ABS jednakokračan. Stoga je $|AN| = \frac{1}{2}|AB| = 6$ cm. **1 BOD**

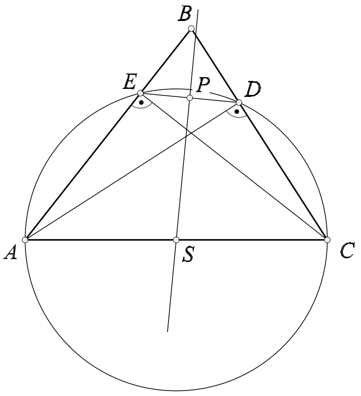
Promotrimo sada pravokutne trokute ANS i ABM. Kako im je jedan kut zajednički, tj. $\sphericalangle NAS = \sphericalangle BAM$, slijedi da su oni slični. **2 BODA**

Iz dobivene sličnosti imamo omjer $|AS| : |AB| = |AN| : |AM|$, **2 BODA**

odakle je $|AM| = \dfrac{|AB| \cdot |AN|}{|AS|} = \dfrac{72}{8} = 9$ cm. **2 BODA**

. . . . **UKUPNO** **10 BODOVA**

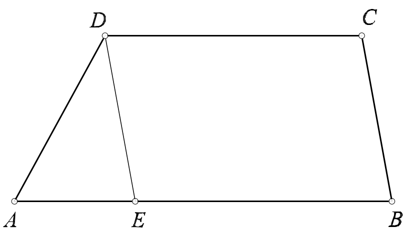
4. Neka su $\overline{AD}$ i $\overline{CE}$ dvije visine trokuta ABC, te neka je P polovište dužine $\overline{ED}$ kao na slici:



1 BOD

Kako su $\overline{AD}$ i $\overline{CE}$ visine trokuta, slijedi da je $\sphericalangle ADC = \sphericalangle AEC = 90°$. **2 BODA**
Neka je S polovište dužine $\overline{AC}$. Opišimo kružnicu k nad dužinom $\overline{AC}$ kao promjerom. Kako je prema Talesovom poučku svaki oni kut nad promjerom kružnice pravi, slijedi da točke D i E leže na toj kružnici, tj. $\overline{DE}$ je tetiva kružnice k. **4 BODA**
Konačno, okomica koja prolazi polovištem P tetive $\overline{DE}$ je simetrala te tetive i ona prolazi središtem S kružnice k, tj. kroz polovište stranice $\overline{AC}$. **3 BODA**
. . . . **UKUPNO** **10 BODOVA**

5. Kako su poznate duljine osnovica trapeza potrebno je odrediti duljinu visine trapeza $ABCD$. **1 BOD**
Povucimo vrhom D trapeza $ABCD$ paralelu sa krakom $\overline{BC}$, te neka ta paralela siječe osnovicu $\overline{AB}$ u točki E kao na slici:



2 BODA

Očito, četverokut $EBCD$ je paralelogram, pa je $|AE| = |AB| - |EB| = |AB| - |CD| = 11 - 7 = 4$ cm. **1 BOD**
S druge strane, visina trapeza jednaka je visini trokuta AED na stranicu $\overline{AE}$. **1 BOD**
Duljine stranica trokuta AED su 3 cm, 4 cm i 5 cm. Kako je $3^2 + 4^2 = 5^2$, prema obratu Pitagorina poučka slijedi da je trokut AED pravokutan, tj $\sphericalangle DAE = 90°$. Dakle, krak $\overline{AD}$ je okomit na osnovice trapeza i njegova duljina je upravo visina trapeza. **3 BODA**
Konačno, površina trapeza je $P = \dfrac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |AD| = \dfrac{11+7}{2} \cdot 3 = 27 \text{ cm}^2$. **2 BODA**
. . . . **UKUPNO** **10 BODOVA**