MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

REGIONALNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – osnovna škola

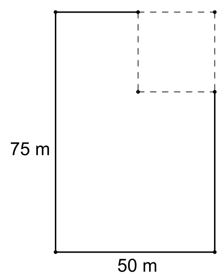
15. svibnja 2009.

1. Na koliko se načina mogu u kvadratiće upisati brojevi 1, 2, 3, 4, 5 tako da vrijede nejednakosti

$$\square > \square > \square < \square > \square \quad ?$$

   Ispiši sve slučajeve!

2. Gospodin Marko ima zemljište pravokutnog oblika sa stranicama duljina 75 m i 50 m. Grad želi otkupiti dio zemljišta (iscrtkani dio na slici), kako bi na njemu izgradio igralište kvadratnog oblika opsega 96 m.

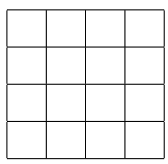


   (a) Koliko gospodinu Marku treba metara ograde kako bi ogradio svoje zemljište nakon prodaje kvadratnog dijela zemljišta?
   (b) Koliko novca grad treba isplatiti Marku ako cijena jednog kvadratnog metra zemljišta iznosi 150 kn?

3. Površina pravokutnika je 2255 cm^2. Ako jednu stranicu pravokutnika umanjimo za 6 cm, površina pravokutnika iznosit će 2009 cm^2. Koliki je opseg polaznog pravokutnika?

4. Ivica, na ekskurziji, svaki dan potroši polovinu svog novca i još 10 kuna. Za četiri dana potroši sve novce. Koliko je novca imao Ivica?

5. Koliko ima kvadrata na slici. Obrazloži!



Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

REGIONALNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
4. razred – rješenja
15. svibnja 2009.

1. Lagano uočavamo kako se jedinica može upisati samo u treći ili peti kvadratić.
Na takav način dobivamo tražene slučajeve:

$\boxed{5} > \boxed{4} > \boxed{1} < \boxed{3} > \boxed{2}$ 1 BOD

$\boxed{5} > \boxed{3} > \boxed{1} < \boxed{4} > \boxed{2}$ 1 BOD

$\boxed{5} > \boxed{2} > \boxed{1} < \boxed{4} > \boxed{3}$ 1 BOD

$\boxed{3} > \boxed{2} > \boxed{1} < \boxed{5} > \boxed{4}$ 1 BOD

$\boxed{4} > \boxed{2} > \boxed{1} < \boxed{5} > \boxed{3}$ 1 BOD

$\boxed{4} > \boxed{3} > \boxed{1} < \boxed{5} > \boxed{2}$ 1 BOD

$\boxed{5} > \boxed{4} > \boxed{2} < \boxed{3} > \boxed{1}$ 1 BOD

$\boxed{5} > \boxed{3} > \boxed{2} < \boxed{4} > \boxed{1}$ 1 BOD

$\boxed{4} > \boxed{3} > \boxed{2} < \boxed{5} > \boxed{1}$ 1 BOD

Dakle, imamo 9 načina. 1 BOD

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. (a) Duljina stranice kvadrata je $96 : 4 = 24$ m. 2 BODA
Trebamo izračunati opseg lika koji nastaje odstranjivanjem rubnog kvadrata duljine stranice 24 m.
Dakle, od opsega polaznog pravokutnika trebamo oduzeti dvostruku duljinu stranice kvadrata,
te ponovno dodati tu dvostruku duljinu. Stoga je opseg zemljišta nakon odstranjivanja kvadrata jednak
$2 \cdot (75 + 50) - 2 \cdot 24 + 2 \cdot 24 = 2 \cdot 125 - 48 + 48 = 250$ m, pa gospodin Marko treba 250 m ograde. 4 BODA
(b) Površina kvadrata je $24 \cdot 24 = 576$ m^2. 2 BODA
Kako je cijena jednog kvadratnog metra 150 kn, grad za otkup treba platiti $576 \cdot 150 = 86400$ kn. 2 BODA
NAPOMENA: Uočimo da u (a) dijelu zadatka opseg lika ostaje nepromijenjen, tj. jednak je opsegu
polaznog pravokutnika. Štoviše taj opseg ne ovisi o dimenzijama odstranjenog kvadrata.
Ukoliko je učenik to uočio i argumentirao, treba dobiti sve bodove u (a) dijelu zadatka.

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

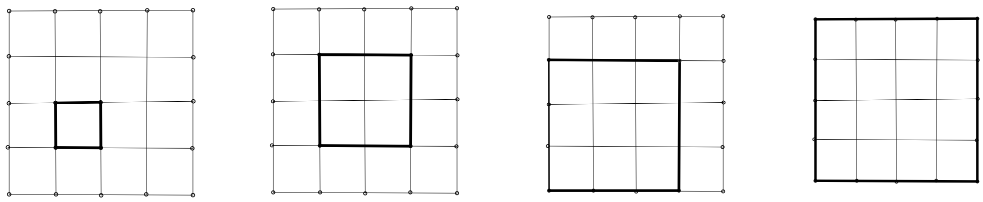
3. Neka su a i b duljine stranica pravokutnika. Ukoliko stranicu b umanjimo za 6 cm, površina
novog pravokutnika je $a \cdot (b - 6) = a \cdot b - 6 \cdot a$. 2 BODA
Kako je $a \cdot b$ površina polaznog pravokutnika, slijedi da se površine pravokutnika razlikuju za $6 \cdot a$. 2 BODA
Prema uvjetu zadatka razlika tih površina je $2255 - 2009 = 246$, tj. $6 \cdot a = 246$. 2 BODA
Zbog toga je $a = 246 : 6 = 41$ cm. 1 BOD
Kako je površina polaznog pravokutnika 2255 cm^2, to je $b = 2255 : 41 = 55$ cm. 1 BOD
Konačno, opseg polaznog pravokutnika je $2 \cdot (41 + 55) = 2 \cdot 96 = 192$ cm. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4. Zadatak rješavamo unatrag tj. odredit ćemo koliko je Ivica imao novca redom na početku
četvrtog, trećeg, drugog i prvog dana.
Kako je četvrti dan Ivica potrošio polovinu novca i još 10 kuna, te ostao bez novca, slijedi
da polovina novca iznosi 10 kuna, pa je na početku četvrtog dana imao $2 \cdot 10 = 20$ kuna. 3 BODA
Kada je trećeg dana Ivica potrošio polovinu novca ostalo mu je $10 + 20 = 30$ kuna,
pa je na početku trećeg dana imao $2 \cdot 30 = 60$ kuna. 3 BODA
Kada je drugog dana Ivica potrošio polovinu novca ostalo mu je $10 + 60 = 70$ kuna,
pa je na početku drugog dana imao $2 \cdot 70 = 140$ kuna. 2 BODA
Konačno, polovina novca od prvog dana iznosi $10 + 140 = 150$ kuna, pa je Ivica na početku
imao $2 \cdot 150 = 300$ kuna. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Na zadanoj slici nalaze se kvadrati koji se sastoje od 1, 4, 9 ili 16 malih kvadratića, tj. kvadrati dimenzija 1×1, 2×2, 3×3 i 4×4.



Direktnim prebrojavanjem dobivamo da:

kvadrata dimenzija 1×1 ima 16, 2 BODA
kvadrata dimenzija 2×2 ima 9, 2 BODA
kvadrata dimenzija 3×3 ima 4, 2 BODA
kvadrata dimenzija 4×4 ima 1. 2 BODA

Dakle, ukupan broj kvadrata na slici je $16 + 9 + 4 + 1 = 30$. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

REGIONALNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

5. razred – osnovna škola

15. svibnja 2009.

1. Knjiga ima 568 stranica. Koliko je ukupno znamenki upotrijebljeno za numeriranje od prve do posljednje stranice te knjige?

2. Najveći zajednički djelitelj dvaju prirodnih brojeva je 12, a njihov je najmanji zajednički višekratnik 672. Koji su to brojevi ako se zna da je manji od njih djeljiv sa 7, a veći nije?

3. Odredi najmanji prirodni broj čiji je zbroj znamenki 2009.

4. Upiši u prazna polja prirodne brojeve tako da zbrojevi u svim retcima, stupcima te na dijagonalama budu jednaki.

		11
12		
17		

5. Jednakokračan trokut ABC ima osnovicu $\overline{BC}$ duljine 12 cm i opseg $\frac{3}{5}$ m. U polovištu P kraka $\overline{AB}$ položena je okomica na $\overline{AB}$ koja siječe krak $\overline{AC}$ u točki D. Izračunaj opseg trokuta BCD.

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

REGIONALNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
5. razred – rješenja
15. svibnja 2009.

1. Jednoznamenkastih brojeva ima 9, pa je potrebno 9 znamenki za numeriranje jednoznamenkastih stranica. 2 BODA
Dvoznamenkastih brojeva ima 90, pa je potrebno $90 \cdot 2 = 180$ znamenki za numeriranje dvoznamenkastih stranica. 2 BODA
Na stranicama knjige ima $568 - 99 = 469$ troznamenkastih brojeva, pa je za njihovo numeriranje potrebno $469 \cdot 3 = 1407$ znamenki. 4 BODA
Dakle, za numeriranje knjige potrebno je $9 + 180 + 1407 = 1596$ znamenki. 2 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka su a i b traženi brojevi. Kako je $D(a, b) = 12$, slijedi da je $a = 12x$ i $b = 12y$, pri čemu su x i y relativno prosti prirodni brojevi, tj. $D(x, y) = 1$. 1 BOD
Kako vrijedi jednakost $D(a, b) \cdot V(a, b) = a \cdot b$, imamo da je $12 \cdot 672 = 12x \cdot 12y$, odakle je $12xy = 672$, tj. $xy = 56$. 3 BODA
Sada imamo sljedeće mogućnosti: 2 BODA

x	1	2	4	7
y	56	28	14	8
$D(x,y)$	1	2	2	1

Kako su brojevi x i y relativno prosti, te budući da je manji od njih djeljiv brojem 7, a veći nije, zaključujemo da se jedino rješenje dobiva za $x = 7$ i $y = 8$. 2 BODA
Tada je $a = 12x = 84$ i $b = 12y = 96$. 2 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Očito, traženi broj će biti najmanji ukoliko on ima najveći broj znamenki 9. 2 BODA
Podijelimo li broj 2009 s 9 dobivamo 223 i ostatak 2, tj. vrijedi $2009 = 223 \cdot 9 + 2$. 4 BODA
Prema tome, traženi broj je $2\underbrace{99\ldots99}$, pri čemu se znamenka 9 pojavljuje 223 puta. 4 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je x broj koji se nalazi u srednjem polju kvadrata. Tada je zbroj na jednoj dijagonali jednak $17 + x + 11 = x + 28$. 1 BOD
U nepoznatom polju u prvom stupcu mora biti broj $x - 1$, zato jer je $(x - 1) + 12 + 17 = x + 28$. 1 BOD
Stoga, u srednjem polju prvog retka mora biti broj 18 zato jer je $(x - 1) + 18 + 11 = x + 28$. 1 BOD
Nadalje, u najdonjem polju drugog stupca mora biti broj 10, zato jer je $18 + x + 10 = x + 28$. 1 BOD
Slično, u desnom polju trećeg retka mora biti $x + 1$, zato jer je $17 + 10 + (x + 1) = x + 28$. 1 BOD
Konačno, u srednjem polju trećeg stupca mora biti broj 16 zato jer je $11 + 16 + (x + 1) = x + 28$. 1 BOD
Prema tome, imamo sljedeću situaciju:

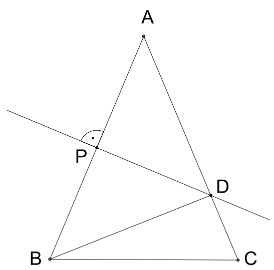
$x-1$	18	11
12	x	16
17	10	$x+1$

Sada, kako su i zbrojevi na dijagonalama jednaki, mora vrijediti $(x - 1) + x + (x + 1) = x + 28$, odnosno $3x = x + 28$, odakle je $2x = 28$, tj. $x = 14$. 2 BODA
Zbog toga lagano dobivamo traženo rješenje:

13	18	11
12	14	16
17	10	15

2 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5.



1 BOD

Pravac PD je simetrala kraka $\overline{AB}$, pa je ABD jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{AB}$.

Zbog toga je $|DA| = |DB|$. 2 BODA

Stoga, za opseg o trokuta BCD vrijedi

$$o = |BC| + |CD| + |DB| = |BC| + (|CD| + |DA|) = |BC| + |CA| = a + b,$$

pri čemu je a duljina osnovice te b duljina kraka trokuta ABC. 3 BODA

Kako je opseg trokuta ABC jednak $\frac{3}{5}$ m $= 60$ cm, a duljina osnovice $a = 12$ cm, mora vrijediti $12 + 2b = 60$, odakle je $2b = 60 - 12 = 48$, tj. $b = 24$ cm. 2 BODA

Dakle, opseg trokuta BCD je $o = a + b = 12 + 24 = 36$ cm. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

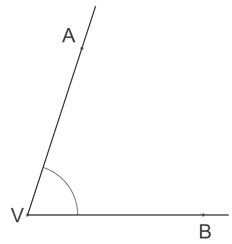
MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

**REGIONALNO NATJECANJE
IZ MATEMATIKE**

6. razred – osnovna škola

15. svibnja 2009.

1. Odredi četiri nepoznata broja ako su zbrojevi po tri broja jednaki 23, 26, 28 i 31.
2. Odredi najmanji prirodni broj čiji je umnožak znamenki jednak 75600.
3. Neka je $\sphericalangle AVB = 72^\circ$. Pomoću šestara i ravnala podijeli $\sphericalangle AVB$ na šest jednakih dijelova. Objasni postupak!



4. Zadan je jednakokračan trokut ABC i spuštena je visina $\overline{AD}$ na osnovicu $\overline{BC}$. Neka je M bilo koja točka na kraku $\overline{AC}$. Dokaži da je $|DB| - |DM| < |AB| - |AM|$.
5. Veliki matematičar Matkomir smislio je novu računsku radnju $\otimes$, tako da vrijedi

$$\begin{aligned} a \otimes 0 &= a, \\ a \otimes b &= b \otimes a, \\ (a+2) \otimes b &= (a \otimes b) + b + 1, \end{aligned}$$

za bilo koje brojeve a i b. Koliko je $15 \otimes 8$?

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

**Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo
kakvih priručnika.**

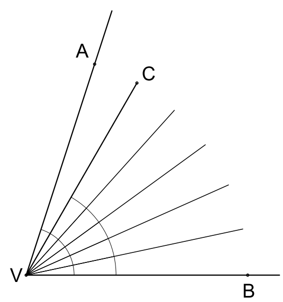
REGIONALNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
6. razred – rješenja

15. svibnja 2009.

1. Označimo tražene brojeve s a, b, c, d i neka je $m = a + b + c + d$. 1 BOD
Kako su zadani zbrojevi od po tri broja, očito vrijede jednadžbe
$a = m - 23$, $b = m - 26$, $c = m - 28$ i $d = m - 31$. 2 BODA
Zbrajanjem prethodnih četiriju jednadžbi dobivamo
$m = a + b + c + d = (m - 23) + (m - 26) + (m - 28) + (m - 31) = 4m - 108$,
odakle je $3m = 108$, tj. $m = 36$. 3 BODA
Sada lagano dobivamo rješenja: $a = 36 - 23 = 13$, $b = 36 - 26 = 10$, $c = 36 - 28 = 8$ i $d = 36 - 31 = 5$. 4 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

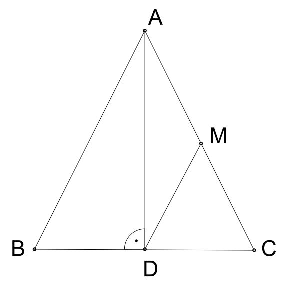
2. Rastav broja 75600 na proste faktore je $75600 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. 1 BOD
Taj broj trebamo prikazati u obliku umnoška što je moguće manje jednoznamenkastih brojeva.
Očito, tri znamenke su 7, 5, 5. 2 BODA
Nadalje, imamo da je $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 9 \cdot 8$ i taj umnožak ne možemo prikazati kao umnožak
dvaju jednoznamenkastih brojeva zato jer je $9 \cdot 9 < 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. 3 BODA
Dakle, traženi broj ima znamenke 7, 5, 5, 6, 9, 8. 2 BODA
Najmanji među njima je broj 556789. 2 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Ako bi kut $\sphericalangle AVB$ podijelili na 6 jednakih dijelova, svaki bi dio bio veličine $72° : 6 = 12°$. 2 BODA
S obzirom da je $72° - 12° = 60°$ i da kut veličine $60°$ znamo konstruirati, konstruiramo kut $\sphericalangle CVB = 60°$. 2 BODA
Tada je $\sphericalangle AVC = \sphericalangle AVB - \sphericalangle CVB = 72° - 60° = 12°$, te kut $\sphericalangle AVC$ prenesemo na kut $\sphericalangle CVB$ pet puta. 2 BODA
KONSTRUKCIJA



4 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

4.



1 BOD
Primjenom nejednakosti trokuta na trokut DCM dobivamo nejednakost $|DC| - |DM| < |CM|$. 3 BODA
Nadalje, kako je trokut ABC jednakokračan, slijedi da je $|CM| = |AC| - |AM| = |AB| - |AM|$. 3 BODA
Kako je D polovište osnovice $\overline{BC}$, slijedi da je $|DC| = |DB|$. 2 BODA
Konačno, uvrštavanjem prethodnih dviju jednakosti u nejednakost trokuta imamo da je
$|DB| - |DM| < |AB| - |AM|$, što je i trebalo dokazati. 1 BOD
.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Kombiniranjem zadanih triju relacija imamo redom

$15 \otimes 8 = 8 \otimes 15 = (6+2) \otimes 15 = (6 \otimes 15) + 16 =$ 2 BODA

$= ((4+2) \otimes 15) + 16 = (4 \otimes 15) + 16 + 16 = (4 \otimes 15) + 32 =$ 2 BODA

$= ((2+2) \otimes 15) + 32 = (2 \otimes 15) + 16 + 32 = (2 \otimes 15) + 48 =$ 2 BODA

$= ((0+2) \otimes 15) + 48 = (0 \otimes 15) + 16 + 48 = (0 \otimes 15) + 64 =$ 2 BODA

$= (15 \otimes 0) + 64 = 15 + 64 = 79.$ 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA