MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – osnovna škola

23. veljače 2009.

1. Na pitanje koliko ima godina, matematičar je odgovorio: "Ako od broja mojih godina oduzmeš 5, zatim dobiveni broj podijeliš s 5, te od toga opet oduzmeš 5 dobit ćeš broj 5." Koliko godina ima taj matematičar?

2. Odredi zbroj svih neparnih dvoznamenkastih prirodnih brojeva.

3. Natjecatelj 4. razreda pohvalio se prijatelju da je riješio 2009 zadataka pripremajući se za natjecanje. Rješavao je računske zadatke, geometrijske zadatke, pričice i zagonetke. Računskih je riješio 3 puta više od svih ostalih i još jedan. Zagonetki je riješio toliko koliko je pričica i geometrijskih riješio zajedno. Geometrija mu nije baš omiljena pa je geometrijskih riješio za 101 manje nego pričica. Izračunaj koliko je ovaj natjecatelj riješio računskih zadataka, koliko geometrijskih, koliko zagonetki i koliko pričica?

4. Napiši sve troznamenkaste brojeve kojima je umnožak znamenaka 54. Koliko ima takvih brojeva?

5. Duljina jedne stranice pravokutnika je dva puta veća od druge stranice. Rastavi pravokutnik na dijelove od kojih možeš sastaviti kvadrat. Objasni postupak!

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – rješenja

23. veljače 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Zadatak rješavamo unatrag. Kako smo od nepoznatog broja prvo oduzeli 5,
zatim dobiveni broj podijelili s 5, te naposlijetku još oduzeli 5, suprotnim računskim
operacijama doći ćemo do traženog broja. 1 BOD
Zadnji dobiveni broj bio je 5. Dodamo li tom broju broj 5, dobivamo $5 + 5 = 10$. 3 BODA
Nadalje, pomnožimo li broj 10 s 5, dobivamo $10 \cdot 5 = 50$. 3 BODA
Konačno, dodamo li broju 50 broj 5, dobivamo $50 + 5 = 55$, pa matematičar ima 55 godina. 3 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Zadatak rješavamo Gaussovom dosjetkom. Neparni dvoznamenkasti prirodni brojevi su
$11, 13, 15, 17, \ldots, 99$. Ukupno ih je $5 \cdot 9 = 45$. Grupiramo ih u parove: prvi i zadnji, drugi i predzadnji,
$\ldots$, pri čemu srednji broj 55 ostaje bez para. 3 BODA
Kako imamo 22 para, imamo redom

$$\begin{aligned} 11 + 13 + 15 + \ldots + 99 &= (11 + 99) + (13 + 97) + \ldots + (53 + 57) + 55 \\ &= 110 + 110 + \ldots + 110 + 55 \\ &= 22 \cdot 110 + 55 \\ &= 2420 + 55 \\ &= 2475. \end{aligned}$$

7 BODOVA
.... UKUPNO 10 BODOVA

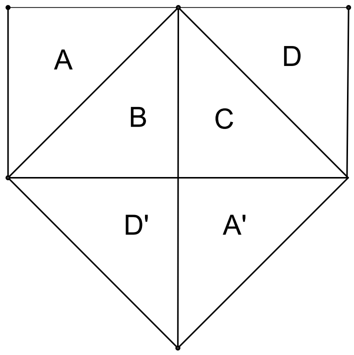
3. Ukupan broj riješenih zadataka je 2009. Kako je učenik riješio tri puta više računskih zadataka
i još jedan, u odnosu na preostale, zaključujemo da je učenik zajedno riješio
$(2009 - 1) : 4 = 2008 : 4 = 502$ preostala zadatka. 2 BODA
Prema tome, broj računskih zadataka je $502 \cdot 3 + 1 = 1506 + 1 = 1507$. 2 BODA
Nadalje, kako je učenik riješio zagonetki isto koliko pričica i geometrijskih zajedno,
slijedi da je riješio $502 : 2 = 251$ zagonetku. 2 BODA
Prema tome, učenik je zajedno riješio 251 pričicu i geometrijski zadatak. Kako je geometrijskih
riješio za 101 manje, zaključujemo da je geometrijskih riješio $(251 - 101) : 2 = 150 : 2 = 75$. 2 BODA
Konačno, broj riješenih pričica je $75 + 101 = 176$. 2 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Kako je $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, broj 54 možemo na tri načina zapisati u obliku umnoška
triju jednoznamenkastih brojeva: $55 = 1 \cdot 6 \cdot 9$, $55 = 2 \cdot 3 \cdot 9$, $55 = 3 \cdot 3 \cdot 6$. 1 BOD
Ako je $55 = 1 \cdot 6 \cdot 9$, imamo brojeve 169, 196, 619, 691, 916, 961. 3 BODA
Ako je $55 = 2 \cdot 3 \cdot 9$, imamo brojeve 239, 293, 329, 392, 923, 932. 3 BODA
Ako je $55 = 3 \cdot 3 \cdot 6$, imamo brojeve 336, 363, 633. 2 BODA
Dakle, ukupno je $6 + 6 + 3 = 15$ troznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenaka jednak 54. 1 BOD
.... UKUPNO 10 BODOVA

5.

2 BODA

Pravokutnik podijelimo na dva jednaka kvadrata, a zatim svaki kvadrat na dva jednaka trokuta. Na takav način dobivamo četiri jednaka pravokutna trokuta (A, B, C, D). Dva trokuta zadržimo u pravokutniku, a preostala dva premjestimo na drugu stranu (A', D'), tako da tvore kvadrat.



8 BODOVA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

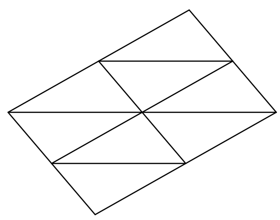
MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

ŽUPANIJSKO NATJECANJE
IZ MATEMATIKE

5. razred – osnovna škola

23. veljače 2009.

1. Koliko ima paralelograma na slici? Obrazloži odgovor.

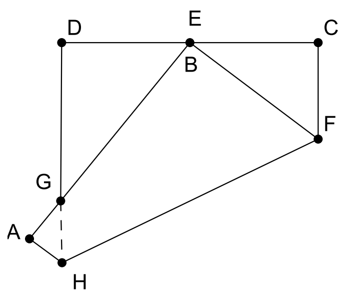


2. Pomoću znamenaka 0 i 5 napiši sve deseteroznamenkaste brojeve koji su djeljivi s 9. Koliko ima takvih brojeva?

3. S kojim jednoznamenkastim brojevima je djeljiv zbroj prvih 2009 brojeva?

4. Voćke su zasađene tako da je u svakom redu 15 voćaka. Kada bi u voćnjaku bilo 6 redova manje, a u svakom redu 5 voćaka više, onda bi u cijelom voćnjaku bilo ukupno 10 voćaka više. Koliko je redova voćaka zasađeno?

5. Zadan je kvadrat $ABCD$ duljine stranice 9 cm. Kvadrat je presavijen, kao na slici, tako da vrh B pada u točku E koja je polovište stranice $\overline{CD}$. Na takav su način određena tri trokuta i to: CEF, EDG i GAH. Koliki je zbroj opsega tih triju trokuta?



Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

5. razred – rješenja

23. veljače 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

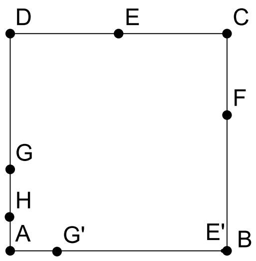
1. Možemo promatrati paralelograme koji su sastavljeni od dva trokuta, od četiri trokuta i cijeli lik. 2 BODA
Paralelograma sastavljenih od dva trokuta ima 8. 3 BODA
Paralelograma sastavljenih od četiri trokuta ima 4. 3 BODA
Cijeli lik je paralelogram. 1 BOD
Dakle, na slici je $8 + 4 + 1 = 13$ paralelograma. 1 BOD
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Zbroj znamenaka bilo kojeg deseteroznamenkastog broja sastavljenog od znamenaka 0 i 5 je višekratnik broja 5. 2 BODA
Nadalje, kako tražimo brojeve koji su djeljivi s 9, zbroj znamenaka mora biti djeljiv s 9.
Kako su brojevi 5 i 9 relativno prosti, slijedi da traženi brojevi moraju imati točno devet petica i jednu nulu. Tada je zbroj znamenaka jednak $9 \cdot 5 = 45$. 2 BODA
Nula ne može biti na prvom mjestu pa imamo brojeve: 5055555555, 5505555555, 5550555555, 5555055555, 5555505555, 5555550555, 5555555055, 5555555505, 5555555550. 5 BODOVA
Dakle, ukupno je 9 brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka. 1 BOD
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Zbroj prvih 2009 brojeva jednak je $1 + 2 + 3 + \cdots + 2008 + 2009 = \dfrac{2009 \cdot 2010}{2} = 2009 \cdot 1005$. 4 BODA
Rastavimo dobiveni umnožak na faktore: $2009 \cdot 1005 = (7 \cdot 7 \cdot 41) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 67) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 67$. 4 BODA
Dakle, jednoznamenkasti brojevi s kojima je djeljiv zbroj prvih 2009 prirodnih brojeva su 1, 3, 5, 7. 2 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je x broj redova voćaka u voćnjaku. Tada je u voćnjaku $15 \cdot x$ voćaka. 1 BOD
Kada bi u voćnjaku bilo 6 redova manje, a u svakom redu 5 voćaka više, u voćnjaku bi bilo $20 \cdot (x - 6) = 20 \cdot x - 120 = 15 \cdot x + (5 \cdot x - 120)$ voćaka. 3 BODA
Dakle, brojevi voćaka se razlikuju za $5 \cdot x - 120$, a prema uvjetu zadatka ta je razlika jednaka 10. 2 BODA
Dakle, $5 \cdot x - 120 = 10$, pa je $5 \cdot x = 130$, odakle je $x = 130 : 5 = 26$.
Dakle, zasađeno je 26 redova voćaka. 4 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Vratimo kvadrat $ABCD$ u prvobitni oblik, te označimo na njemu sve vrhove uočenih trokuta.
Označimo točku G dvaput, jednom na stranici $\overline{AD}$ (G), a jednom na stranici $\overline{AB}$ (G').
Napravimo isto i s točkom E.



2 BODA
Uočimo kako je svaka od stranica triju trokuta CEF, EDG i GAH sadržana u nekoj stranici kvadrata $ABCD$, te da sve te stranice zajedno pokrivaju sve stranice kvadrata. 3 BODA
Zbog toga je zbroj opsega trokuta CEF, EDG i GAH jednak opsegu kvadrata, odnosno jednak je $4 \cdot 9 = 36$ cm. 5 BODOVA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

ŽUPANIJSKO NATJECANJE
IZ MATEMATIKE

6. razred – osnovna škola

23. veljače 2009.

1. Pripremajući se za atletsko natjecanje, Niko je prvog dana pretrčao $4\frac{1}{3}$ km, drugog dana $1\frac{3}{5}$ km više od prvog, trećeg dana $\frac{4}{15}$ km manje od drugog, a četvrtog dana 5km manje od prvog i trećeg dana zajedno. Koliko je ukupno kilometara pretrčao Niko?

2. Martin ima određeni broj žutih i plavih kuglica. Od ukupnog broja kuglica, $\frac{3}{7}$ je žutih, a ostale su plave. Kada bi Martin dobio još dvije žute kuglice, a izgubio šest plavih kuglica, imao bi jednak broj žutih i plavih kuglica. Koliko Martin ima žutih, a koliko plavih kuglica?

3. Koliko ima troznamenkastih brojeva djeljivih s 18 kojima je zbroj znamenaka 18?

4. Zadan je trokut ABC. Neka je M polovište stranice $\overline{BC}$, N polovište stranice $\overline{AB}$ te neka su dužine $\overline{AM}$ i $\overline{CN}$ međusobno okomite. Izračunaj površinu trokuta ABC ako je $|AT| = 2$ cm, $|CN| = 3$ cm, pri čemu je T sjecište dužina $\overline{AM}$ i $\overline{CN}$.

5. Simetrale kutova povučenih iz vrhova A i B, trokuta ABC, sijeku se pod kutom od $120°$. Visina i simetrala kuta iz vrha C zatvaraju kut od $10°$. Odredi kutove trokuta ABC.

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
6. razred – rješenja
23. veljače 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Niko je prvog dana pretrčao $\frac{13}{3}$ km. 1 BOD

Drugog dana je pretrčao $\frac{13}{3} + 1\frac{3}{5} = \frac{13}{3} + \frac{8}{5} = \frac{13 \cdot 5 + 8 \cdot 3}{15} = \frac{89}{15}$ km. 2 BODA

Trećeg dana Niko je pretrčao $\frac{89}{15} - \frac{4}{15} = \frac{85}{15} = \frac{17}{3}$ km. 2 BODA

Četvrtog dana je pretrčao $\frac{13}{3} + \frac{17}{3} - 5 = \frac{30}{3} - 5 = 10 - 5 = 5$ km. 2 BODA

Dakle, Niko je ukupno pretrčao $\frac{13}{3} + \frac{89}{15} + \frac{17}{3} + 5 = 15 + \frac{89}{15} = \frac{225 + 89}{15} = \frac{314}{15} = 20\frac{14}{15}$ km. 3 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Ako s x označimo ukupan broj kuglica, tada je $\frac{3}{7}x$ žutih i $\frac{4}{7}x$ plavih. 2 BODA

Ukoliko Martin dobije dvije žute kuglice te izgubi šest plavih kuglica, on ima jednak broj žutih i plavih kuglica, pa vrijedi jednadžba $\frac{3}{7}x + 2 = \frac{4}{7}x - 6$. 3 BODA

Dalje je $\frac{4}{7}x - \frac{3}{7}x = 2 + 6$, tj. $\frac{1}{7}x = 8$, odakle je $x = 56$. 3 BODA

Prema tome, Martin je na početku imao $\frac{3}{7} \cdot 56 = 24$ žute i $\frac{4}{7} \cdot 56 = 32$ plave kuglice. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je $\overline{abc}$ troznamenkasti broj za koji je $a + b + c = 18$. Ako je broj djeljiv s 18, onda je djeljiv s 2 i 9. Očito, svaki takav broj $\overline{abc}$ je djeljiv s 9, pa mora biti paran, tj. $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. 1 BOD

Ako je $c = 0$, onda je $a + b = 18$, odakle dobivamo broj 990. 1 BOD

Ako je $c = 2$, onda je $a + b = 16$, odakle dobivamo brojeve 972, 882, 792. 1 BOD

Ako je $c = 4$, onda je $a + b = 14$, odakle dobivamo brojeve 954, 864, 774, 684, 594. 2 BODA

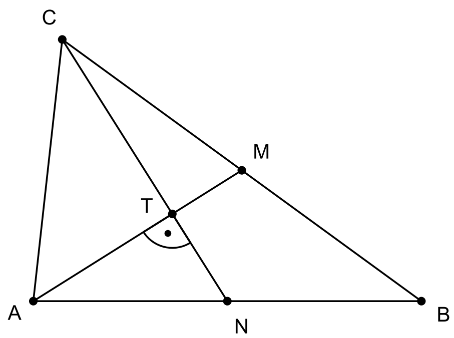
Ako je $c = 6$, onda je $a + b = 12$, odakle dobivamo brojeve 936, 846, 756, 666, 576, 486, 396. 2 BODA

Ako je $c = 8$, onda je $a + b = 10$, odakle dobivamo brojeve 918, 828, 738, 648, 558, 468, 378, 288, 198. 2 BODA

Dakle, ukupno je $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ brojeva. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

4.



1 BOD

Promotrimo trokute ANC i NBC. Oni imaju zajedničku visinu, povučenu iz vrha C. Nadalje, kako je N polovište stranice $\overline{AB}$, slijedi da je $|AN| = |NB|$. Dakle, trokuti ANC i NBC imaju jednake površine, pa je površina trokuta ABC dva puta veća od površine trokuta ANC tj. $P(ABC) = 2P(ANC)$. 3 BODA

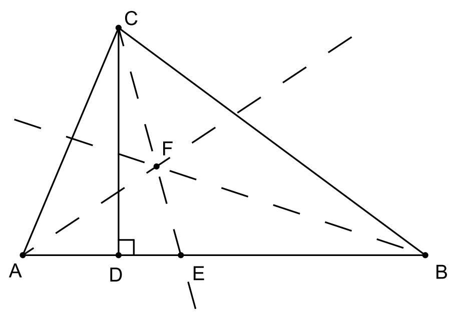
Nadalje, kako su dužine $\overline{AM}$ i $\overline{CN}$ okomite, slijedi da je $\overline{AT}$ visina trokuta ANC s obzirom na $\overline{CN}$. 2 BODA

Zbog toga je $P(ANC) = \dfrac{|CN| \cdot |AT|}{2} = \dfrac{3 \cdot 2}{2} = 3 \text{ cm}^2$. 2 BODA

Konačno, za površinu trokuta ABC vrijedi $P(ABC) = 2P(ANC) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}^2$ 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka su α, β, γ redom kutovi pri vrhovima A, B, C. Nadalje, neka je D nožište visine iz vrha C, E sjecište simetrale kuta γ sa stranicom $\overline{AB}$, te neka je F sjecište simetrala kutova α i β.



1 BOD

Iz trokuta ABF imamo da je $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} + 120^\circ = 180^\circ$, tj. $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 60^\circ$. Zbog toga je $\alpha + \beta = 120^\circ$, pa je $\gamma = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. 3 BODA

Nadalje, kako je $\sphericalangle ECA = \dfrac{\gamma}{2} = 30^\circ$ slijedi da je $\sphericalangle DCA = \sphericalangle ECA - \sphericalangle ECD = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$, zato jer simetrala i visina iz vrha C zatvaraju kut od 10°. 2 BODA

Stoga, iz pravokutnog trokuta ADC imamo da je $\alpha = 180^\circ - (20^\circ + 90^\circ) = 70^\circ$. 2 BODA

Na kraju je $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ) = 50^\circ$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – osnovna škola

23. veljače 2009.

1. Koliko dijagonala ima pravilni mnogokut kojemu se veličine unutarnjeg i vanjskog kuta odnose kao 3 : 2 ?

2. Zadani su cijeli brojevi a i b. Ako je zbroj tih dvaju brojeva jednak 100, može li biti $8a + 3b = 2009$? Obrazloži odgovor!

3. Riješi jednadžbu
$$\frac{1+3+5+\cdots+2007+2009}{2+4+6+\cdots+2006+2008} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2008}.$$

4. U jednakokračnom trapezu $ABCD$ dijagonale su međusobno okomite i duljina visine jednaka je 28 mm. Izračunaj površinu trapeza $ABCD$.

5. U kutiji se nalazi 10000 kuglica označenih brojevima od 1 do 10000. Na svakoj kuglici napisan je po jedan broj i svaki broj pojavljuje se točno jedanput. Izvlačimo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da je na njoj broj s različitim znamenkama koji je djeljiv s 5?

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
7. razred – rješenja
23. veljače 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je α unutarnji te α' vanjski kut pravilnog mnogokuta. Znamo da je $\alpha + \alpha' = 180°$. 1 BOD
Prema uvjetu zadatka je $\alpha : \alpha' = 3 : 2$ pa je $\alpha = 3k$ i $\alpha' = 2k$. Stoga je $3k + 2k = 180°$,
tj. $5k = 180°$, odakle je $k = 36°$. Prema tome, $\alpha = 3k = 108°$. 3 BODA
S druge strane, kako je zbroj unutarnjih kutova $n-$terokuta jednak $(n-2) \cdot 180°$,
slijedi da je $\alpha = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$. 1 BOD
Prema tome, vrijedi jednadžba

$$\frac{(n-2) \cdot 180°}{n} = 108°,$$

odakle je $\dfrac{n-2}{n} = \dfrac{108°}{180°} = \dfrac{3}{5}$, tj. redom $5(n-2) = 3n$, $2n = 10$, pa je $n = 5$. 3 BODA
Konačno, broj dijagonala pravilnog peterokuta jednak je $d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{5 \cdot 2}{2} = 5$. 2 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Kako je $a + b = 100$, slijedi da je $8a + 3b = 3(a + b) + 5b = 3 \cdot 100 + 5b = 300 + 5b$. 5 BODOVA
Nadalje, prema uvjetu zadatka je $300 + 5b = 2009$, odakle je $5b = 1709$. 2 BODA
Očito ne postoji cijeli broj b takav da je $5b = 1709$, jer je lijeva strana posljednje jednakosti
djeljiva s 5, a desna nije. 3 BODA
NAPOMENA: Učenik također može riješiti posljednju linearnu jednadžbu i zaključiti
da njeno rješenje nije cijeli broj.
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. U ovom zadatku koristimo Gaussovu dosjetku. Izračunajmo prvo nazivnik razlomka na lijevoj strani jednadžbe. Imamo da je

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2006 + 2008 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 1003 + 1004) = 2 \cdot \frac{1004 \cdot 1005}{2} = 1004 \cdot 1005.$$

3 BODA

Izračunajmo sada brojnik razlomka na lijevoj strani, služeći se prethodnim rezultatom. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned}
1 + 3 + 5 + \cdots + 2007 + 2009 &= (1 + 2 + 3 + \cdots + 2007 + 2008 + 2009) - (2 + 4 + 6 + \cdots + 2006 + 2008) \\
&= \frac{2009 \cdot 2010}{2} - 1004 \cdot 1005 = 2009 \cdot 1005 - 1004 \cdot 1005 \\
&= 1005 \cdot (2009 - 1004) = 1005 \cdot 1005.
\end{aligned}$$

3 BODA

Prema tome, zadana jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

$$\frac{1005 \cdot 1005}{1004 \cdot 1005} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2008},$$

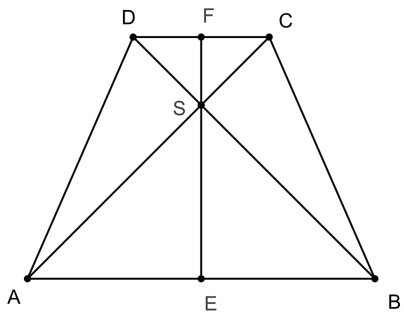
odakle je

$$\frac{1}{x} = \frac{1005}{1004} - \frac{1}{2008} = \frac{2010 - 1}{2008} = \frac{2009}{2008}.$$

3 BODA

Dakle, rješenje dane jednadžbe je $x = \dfrac{2008}{2009}$. 1 BOD
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4. Uvedimo oznake kao na slici:



1 BOD

Kako je trapez $ABCD$ jednakokračan, slijedi da je $|BC| = |AD|$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DAB$. Nadalje,
očito je $\overline{AB}$ zajednička stranica trokuta ABC i ABD, pa su oni sukladni prema poučku $S-K-S$. 2 BODA
Iz te sukladnosti slijedi da je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABD$, tj. $\sphericalangle SAB = \sphericalangle ABS$. Prema tome,
trokut ABS je jednakokračan pravokutan pa je $\sphericalangle SAB = 45°$. 2 BODA
Sada, neka je $\overline{EF}$ visina trapeza $ABCD$ koja sadrži točku S, te neka je $v_1 = |ES|$ i $v_2 = |SF|$.
Dakle, $\sphericalangle SAE = 45°$, $\sphericalangle AES = 90°$, pa je trokut AES jednakokračan pravokutan,
što znači da je $|AE| = |ES|$. Kako je $\overline{ES}$ visina jednakokračnog trokuta ABS, slijedi da je
$|AE| = |EB| = \dfrac{a}{2}$. To znači da je $\dfrac{a}{2} = v_1$. 2 BODA
Analogno je $\dfrac{c}{2} = v_2$, pa je $v = v_1 + v_2 = \dfrac{a}{2} + \dfrac{c}{2} = \dfrac{a+c}{2}$. 1 BOD
Zbog toga je površina trapeza $P(ABCD) = \dfrac{a+c}{2} \cdot v = v \cdot v = 28 \cdot 28 = 784\ \text{mm}^2$. 2 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Na kuglicama su brojevi $b \leq 10000$. Prebrojat ćemo jednoznamenkaste, dvoznamenkaste, troznamenkaste, četveroznamenkaste i peteroznamenkaste brojeve koji zadovoljavaju uvjete zadataka.

1. Ako je $1 \leq b \leq 9$, onda samo broj 5 zadovoljava uvjete, pa imamo 1 jednoznamenkasti broj. 1 BOD
2. Ako je $10 \leq b \leq 99$ onda je $b = \overline{x0}$ ili $b = \overline{x5}$. Kako je $x \neq 0$ i budući da su znamenke brojeva različite, brojeva prve vrste ima 9, a druge 8, pa imamo ukupno 17 dvoznamenkastih brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka. 2 BODA
3. Ako je $100 \leq b \leq 999$ onda je $b = \overline{xy0}$ ili $b = \overline{xy5}$. Brojeva prve vrste ima $9 \cdot 8 = 72$ zato jer znamenku stotica možemo odabrati na 9, a znamenku desetica na 8 načina. Nadalje, brojeva druge vrste ima $8 \cdot 8 = 64$ zato jer znamenku stotica možemo odabrati na 8 načina (sve osim 0 i 5), a znamenku desetica opet na 8 načina (sve osim 5 i odabrane znamenke stotica). Dakle, ukupno je $72 + 64 = 136$ troznamenkastih brojeva. 2 BODA
4. Ako je $1000 \leq b \leq 9999$, onda je $b = \overline{xyz0}$ ili $b = \overline{xyz5}$. Sličnim zaključivanjem kao u prethodnom slučaju zaključujemo kako brojeva prve vrste ima $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$, a druge $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$ (opet prvo biramo tisućice, stotice pa desetice). Dakle, četveroznamenkastih brojeva ima $504 + 448 = 952$. 2 BODA
5. Očito broj $b = 10000$ ne zadovoljava uvjete zadatka.

Prema tome, imamo $1 + 17 + 136 + 952 = 1106$ povoljnih događaja. Konačno, kako je je broj mogućih događaja 10000, slijedi da je tražena vjerojatnost

$$p = \frac{1106}{10000} = 0.1106 = 11.06\%.$$

3 BODA

NAPOMENA: Ukoliko je učenik točno riješio zadatak, dobiva sve bodove bilo da vjerojatnost napiše u obliku razlomka, decimalnog broja ili postotka.
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

8. razred – osnovna škola

23. veljače 2009.

1. Izračunaj vrijednost izraza $\dfrac{1}{x^2+2x+1} - \dfrac{1}{x^2-2x+1}$, ako je $x = 1-\sqrt{2}$.

2. Ako je $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+14=0$, koliko je $x+y+z$?

3. Predvorje hotela, oblika pravokutnika duljine 8 m i širine 15 m, popločeno je pločicama oblika pravokutnika čija je duljina dvaput veća od širine, te je širina pločice, izražena u centimetrima, prirodni broj. Pločice su smeđe, bijele i crne boje te je bijelih 7 puta više od crnih, smeđih 6 puta više od bijelih i broj crnih je veći od 80, a manji od 160. Terasa hotela oblika kvadrata popločena je pločicama oblika pravokutnika čija je duljina $\frac{4}{5}$ širine, a širina jednaka širini pločica iz predvorja. Pločice su istih boja i jednakih odnosa između broja pojedinih kao i u predvorju hotela. Ako je broj crnih pločica na terasi $\frac{3}{4}$ broja crnih pločica u predvorju, kolika je duljina terase?

4. Nad dužinom $\overline{AC}$ konstruirani su s različitih strana pravokutni trokuti ABC i ACD. Izračunaj površinu četverokuta $ABCD$ ako je $|AB| = |BC|$ i $|AD| + |DC| = 12$ cm.

5. Zadani su međusobno okomiti pravci p i t koji se sijeku u točki S. Na pravcu p odabrana je točka E takva da je $|ES| = \sqrt{6}$, a na pravcu t različite točke F i H takve da je $|FS| = |HS| = 3\sqrt{2}$. Odredi površinu dijela ravnine kojeg omeđuju kružnica s promjerom $\overline{EF}$ i kružnica s promjerom $\overline{HE}$.

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
8. razred – rješenja
23. veljače 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Uočimo kako u nazivnicima imamo redom kvadrat zbroja i kvadrat razlike. Zbog toga, za $x = 1 - \sqrt{2}$ dobivamo:

$$\frac{1}{x^2+2x+1} - \frac{1}{x^2-2x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(2-\sqrt{2})^2} - \frac{1}{(-\sqrt{2})^2} = \frac{1}{6-4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}.$$

5 BODOVA

Nadalje, racionalizacijom nazivnika u prvom razlomku lagano dobivamo traženu vrijednost:

$$\frac{1}{6-4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6-4\sqrt{2}} \cdot \frac{6+4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{6+4\sqrt{2}}{36-(4\sqrt{2})^2} - \frac{1}{2} = \frac{6+4\sqrt{2}}{36-32} - \frac{1}{2} = \frac{6+4\sqrt{2}-2}{4} = \frac{4+4\sqrt{2}}{4} = 1+\sqrt{2}.$$

5 BODOVA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Transformirajmo ponajprije zadanu jednadžbu $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14 = 0$.
Primjenom formula za kvadrat zbroja i razlike imamo redom:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14 &= x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 + z^2 - 6z + 9 - 9 + 14 \\ &= (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 1 - 4 - 9 + 14 \\ &= (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2, \end{aligned}$$

pa je dana jednadžba ekvivalentna jednadžbi $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 0$. 5 BODOVA

Kako je zbroj kvadrata triju brojeva jednak nuli, zaključujemo da su svi oni jednaki nuli.

Preciznije, $x - 1 = 0$, $y + 2 = 0$, $z - 3 = 0$, odakle je $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$. 3 BODA

Zbog toga je $x + y + z = 1 - 2 + 3 = 2$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka su a, b, c redom broj smeđih, bijelih i crnih pločica u predvorju, te a_1, b_1, c_1 na terasi.
Nadalje, neka je d širina pločice u predvorju.

Tada je $2d$ duljina pločice u predvorju, d širina pločice na terasi i $\frac{4}{5}d$ duljina pločice na terasi. 1 BOD

Također je $b = 7c$, $b_1 = 7c_1$, $a = 6b$, $a_1 = 6b_1$. 1 BOD

Ukupan broj pločica u predvorju je $a + b + c = 6b + b + c = 7b + c = 7 \cdot 7c + c = 50c$,
a površina jedne pločice u predvorju je $d \cdot 2d = 2d^2$, pa vrijedi
$(50c) \cdot (2d^2) = 800 \cdot 1500$ cm^2, odnosno $c \cdot d \cdot d = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3$. 1 BOD

Kako je $d \in \mathbf{N}$, imamo sljedeću tablicu:

c	12000	3000	750	480	120	30
d	1	2	4	5	10	20

S obzirom da je $80 < c < 160$, vrijedi $c = 120$ cm, $d = 10$ cm. 2 BODA

Dalje je $c_1 = \frac{3}{4}c = 90$, $b_1 = 7c_1 = 630$, $a_1 = 6b_1 = 3780$,
pa je ukupan broj pločica na terasi $a_1 + b_1 + c_1 = 4500$. 2 BODA

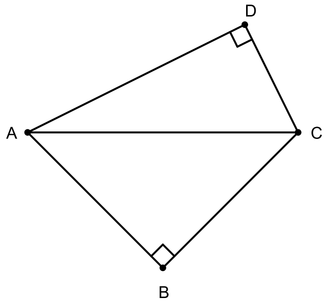
Površina jedne pločice na terasi je $d \cdot \frac{4}{5}d = 80$ cm^2. 1 BOD

Konačno, neka je t duljina terase. Tada je $t^2 = 4500 \cdot 80 = 360000$, odakle je $t = 600$ cm.

Dakle, duljina terase je $t = 600$ cm, odnosno 6 m. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4.



1 BOD

Neka je $|AD| = b$, $|DC| = a$ i $|AB| = |BC| = x$. Primjenom Pitagorinog poučka na trokute ABC i ACD dobivamo:

$$a^2 + b^2 = |AC|^2 \qquad \text{i} \qquad 2x^2 = |AC|^2.$$

2 BODA

Izjednačavanjem tih dviju relacija dobivamo da je $a^2 + b^2 = 2x^2$. Nadalje, kako je $a + b = 12$, kvadriranjem dobivamo da je $a^2 + 2ab + b^2 = 144$, odakle je $a^2 + b^2 = 144 - 2ab$.

Zbog toga je $144 - 2ab = 2x^2$, odakle je $ab + x^2 = 72$. 3 BODA

S druge strane, površina četverokuta $ABCD$ jednaka je zbroju površina dvaju pravokutnih trokuta ABC i ACD, pa je

$$P(ABCD) = P(ACD) + P(ABC) = \frac{ab}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{ab + x^2}{2}.$$

2 BODA

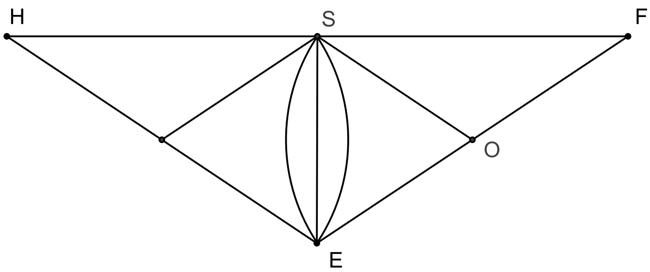
Konačno, iz dobivenih formula slijedi

$$P(ABCD) = \frac{ab + x^2}{2} = \frac{72}{2} = 36 \text{ cm}^2.$$

2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5.



1 BOD

Kako je trokut EFS pravokutan, prema obratu Talesovog poučka, točka S se nalazi na kružnici s promjerom $\overline{EF}$. Analogno je točka S na kružnici s promjerom $\overline{HE}$. 1 BOD

Neka je točka O polovište dužine $\overline{EF}$. Očito, točka O je središte kružnice s promjerom $\overline{EF}$ te je $|OS| = |OE| = |OF|$. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut EFS slijedi da je $|EF|^2 = |ES|^2 + |FS|^2 = (\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 6 + 18 = 24$, odakle je $|EF| = 2\sqrt{6}$. 1 BOD

Zbog toga je $|OS| = |OE| = \sqrt{6}$. Kako je $|ES| = \sqrt{6}$, slijedi da je trokut OSE jednakostraničan, pa je $\sphericalangle EOS = 60°$. 1 BOD

Površina P_1 kružnog isječka sa središnjim kutom $\sphericalangle EOS$ je $P_1 = \dfrac{1}{6} \cdot (\sqrt{6})^2\pi = \pi$,

a površina P_2 jednakostraničnog trokuta OSE je $P_2 = \dfrac{(\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$. 2 BODA

Zbog simetričnosti s obzirom na pravac p, za traženu površinu P vrijedi $P = 2(P_1 - P_2)$.

Dakle, vrijedi $P = 2\left(\pi - \dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right) = 2\pi - 3\sqrt{3}$. 3 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA